Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest II (30. April 2008)

(mit Lösung)

—— *kein Taschenrechner; Skriptum erlaubt* ——

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18):*		

Beispiel 1.

Ein Massepunkt bewege sich entlang des Hyperbelbogens

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi \\ \sinh\varphi \end{pmatrix}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Massepunkt an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$, und für $t \geq 0$ sei die Geschwindigkeit der Bewegung entlang des Hyperbelbogens durch die Beziehung

$$\dot{\varphi}(t) = 3\,t^2$$

vorgegeben. Man überlege zunächst, in welcher Weise dadurch die Bahn des Massepunktes als Funktion der Zeit t festgelegt ist und beantworte dazu folgende Fragen:

a) Man gebe $\varphi(t)$ an.

b) Man berechne den Geschwindigkeitsvektor der so definierten Bahnkurve $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.

   Anmerkung: Man gebe die Antwort zu b) für beliebiges $\varphi(t)$ an und setzte erst dann konkret $\dot{\varphi}(t)$ laut Angabe und $\varphi(t)$ (Lösung von a)) ein.

c) Man berechne den Abstand $a(t)$ des Massepunktes von der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$ als Funktion der Zeit t. (Gemeint ist der Abstand in der (x, y)-Ebene, nicht die Länge der durchlaufenen Bahnkurve.)

   Hinweis: $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$.

LÖSUNG

a) Die Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (Zeitpunkt $t = 0$) entspricht $\varphi(0) = 0$. Daher ist

$$\varphi(t) = 0 + \int_{\tau=0}^{t} \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau = t^3.$$

b) Bahnkurve (als Funktion des Parameters t):

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi(t)) \\ \sinh(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t^3) \\ \sinh(t^3) \end{pmatrix}$$

   mit [Kettenregel]

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) \\ \cosh(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = 3\,t^2 \begin{pmatrix} \sinh(t^3) \\ \cosh(t^3) \end{pmatrix}.$$

c) Abstandsquadrat:

$$|\tilde{\boldsymbol{r}}(t) - \tilde{\boldsymbol{r}}(0)|^2 = (\cosh(\varphi(t)) - 1)^2 + (\sinh(\varphi(t)) - 0)^2 = (\cosh(t^3) - 1)^2 + (\sinh(t^3)) - 0)^2,$$

   also

$$|\tilde{\boldsymbol{r}}(t) - \tilde{\boldsymbol{r}}(0)|^2 = \underbrace{\cosh^2(t^3) + \sinh^2(t^3)}_{=2\cosh^2(t^3)-1} - 2\cosh(t^3) + 1 = 2(\cosh^2(t^3) - \cosh(t^3)).$$

   Daher

$$a(t) = \sqrt{2}\,\sqrt{\cosh^2(t^3) - \cosh(t^3)}.$$

Beispiel 2.

Gegeben sei die ebene Parabel in schräger Lage, die durch die Punkte $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ und $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ verläuft und die Gerade $x = y$ als Symmetrieachse besitzt ($(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ist also der Scheitelpunkt der Parabel). Man berechne den Wert des Bereichsintegrals

$$\int_B d(x, y)$$

über den endlichen Abschnitt B der x-y-Ebene, der sich zwischen der x-Achse, der y-Achse und dem Parabelbogen befindet.

Anmerkung: Man verwende die Substitutionsregel, basierend auf einer naheliegenden orthogonalen Koordinatentransformation. Geometrisch denken spart Rechenarbeit. Parabel in den neuen Koordinaten darstellen (einfach!), Integrationsgrenzen genau überlegen und Symmetrie ausnützen.

LÖSUNG

Wir verwenden ein um 45 Grad im Uhrzeigersinn verdrehtes kartesisches Koordinatensystem (u, v), so dass die v-Achse der Diagonale $x = y$ entspricht. Für $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ gilt dann

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \equiv 1,$$

weil es sich um eine orthogonale Koordinatentransformation handelt. Der Scheitel der Parabel hat vom Ursprung den Abstand 1 und hat daher die Koordinaten $(u, v) = (0, 1)$. Außerdem verläuft die Parabel laut Angabe durch die beiden Punkte $(u, v) = (1, 0)$ und $(u, v) = (-1, 0)$, die ebenfalls von $(0, 0)$ den Abstand 1 haben. Die Gleichung der Parabel transformiert sich daher zzu

$$v = 1 - u^2.$$

Die beiden Geradenstücke entlang der x- und y-Achse, die dem linken unteren Rand des Integrationsbereiches B entsprechen, haben die Parameterdarstellung

$$v = \pm u,$$

und der Integrationsbereich in der (u, v)-Parameterebene ist daher gegeben durch

$$B_{(u,v)} = \{(u, v) : |u| \le v \le 1 - u^2\}.$$

Zu bestimmenen bleiben noch die u-Koordinaten des linken und rechten Eckpunktes: Dort gilt $v = |u|$ und $v = 1 - u^2$, also z.B. rechts:

$$u^2 + u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

und links symmetrisch.

Daher (mit Symmetrie):

$$\int_B d(x, y) = 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} \int_{v=u}^{1-u^2} 1\, dv\, du = 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} (1 - u^2 - u)\, du = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 7).$$

Beispiel 3.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{v}(t) + 2n\,\dot{v}(t) + v(t) \;=\; 0 \qquad (\,n = 2, 3, \ldots\,)$$

a) Man bestimme alle Lösungen $v(t)$, die die Anfangsbedingung $v(0) = 1$ erfüllen ($n \geq 2$ beliebig).

b) Wenn man im Ergebnis von a) $n = 1$ einsetzt, erhält man nur eine einzige Lösung. Diese Lösung $v(t)$ ist korrekt, d.h. es gilt tatsächlich $\ddot{v}(t) + 2\,\dot{v}(t) + v(t) = 0$. Gibt es in diesem Fall noch weitere Löungen mit $v(0) = 1$?

Anmerkung: Eigentlich braucht man unter b) nichts zu rechnen – man muss nur korrekt argumentieren (saubere Begründung!). Wer die allgemeine Lösung für den Fall $n = 1$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = 1$ korrekt herleitet, verdient sich 2 Extra-Punkte.

LÖSUNG

a) Charakteristische Gleichung (aus dem Ansatz $v(t) = e^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + 2n\,\lambda + 1 \;=\; 0$$

mit den reellen, negativen Lösungen

$$\lambda_{1,2} \;=\; -\,n \pm \sqrt{n^2 - 1}.$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösungsschar

$$v(t) \;=\; C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $v(0) = 1$ folgt $C_1 + C_2 = 1$, daher lautet die allgemeine Lösung zu a):

$$v(t) \;=\; C\,e^{\lambda_1 t} + (1 - C)\,e^{\lambda_2 t} \;=\; e^{-nt}\,(C\,e^{\sqrt{n^2-1}\,t} + (1 - C)\,e^{-\sqrt{n^2-1}\,t}), \qquad C \text{ beliebig.}$$

b) Setzt man in a) formal $n = 1$, so erhält man $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und daher $v(t) = e^{-t}$. Diese Lösung ist korrekt (wie man leicht nachprüft), aber es ist nicht die allgemeine Lösung.

$n = 1$ ist ein Sonderfall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = 0$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda = -1$, daher ist die allgemeine Lösungsschar der DGL gegeben durch

$$v(t) \;=\; C_1\,e^{-t} + C_2\,t\,e^{-t}.$$

Die allgemeine Lösung zur Anfangsbedingung $v(0) = 1$ lautet daher

$$v(t) \;=\; (1 + C\,t)\,e^{-t}, \qquad C \text{ beliebig.}$$