Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest I (5. März 2008)

(mit Lösung)

— — *kein Taschenrechner; Skriptum erlaubt* — —

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18):*		

Beispiel 1.

Der Verlauf einer ebenen Kurve $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ werde in *Polarkoordinaten* vorgegeben, d.h. anstelle der kartesischen Koordinaten $(x(t), y(t))$ wird der Abstand vom Ursprung, $r = r(t) \geq 0$, und der Winkel, $\varphi = \varphi(t)$, jeweils als Funktion des Parameters t spezifiziert.

Die folgenden Fragen sind unabhängig voneinander zu beantworten.

a) Man leite eine Formel für die Länge $|\boldsymbol{r}'(t)|$ des Tangentialvektors her (für beliebiges $r(t)$ bzw. $\varphi(t)$).

b) Es sei $r(t) \geq 0$ beliebig und $\varphi(t) = e^t$. Man gebe die Umparametrisierung der entsprechenden Kurve bezüglich des Parameters φ an, $\tilde{\boldsymbol{r}}(\varphi) = (\tilde{x}(\varphi), \tilde{y}(\varphi))$. Wie lauten $\tilde{x}(\varphi)$, $\tilde{y}(\varphi)$?

c) Eine konkrete Kurve C sei für $t \geq 0$ dadurch festgelegt, dass die Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$ Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme sein sollen: Zunächst gelte

$$r'(t) \;=\; 1/r(t), \qquad r(0) = 1,$$

und mit dem so festgelegten $r(t)$ gelte

$$\varphi'(t) \;=\; r(t), \qquad \varphi(0) = 0.$$

Man gebe eine Darstellung dieser Kurve in der Form „$r = r(\varphi)$“ an (Abstand vom Ursprung als Funktion des Winkels).

LÖSUNG

a) Mit

$$\boldsymbol{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

ist $(' = d/dt)$

$$\boldsymbol{r}' \;=\; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi' \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi' \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\boldsymbol{r}'| \;=\; \ldots \;=\; \sqrt{r'^2 + r^2\,\varphi'^2}\,.$$

b) $\varphi(t) = e^t > 0 \;\;\Rightarrow\;\; t(\varphi) = \ln\varphi \;\;\Rightarrow$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} r(\ln\varphi)\cos\varphi \\ r(\ln\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

c) Separation der Variablen:

$$r\,dr \;=\; dt \quad\Rightarrow\quad \frac{r^2}{2} \;=\; t + C$$

Mit $r(0) = 1$ folgt

$$r(t) \;=\; \sqrt{2t+1}\,, \qquad \text{daher} \quad \varphi(t) \;=\; \int_{\tau=0}^{t} \sqrt{2\tau+1}\,d\tau \;=\; \frac{1}{3}\Big(\underbrace{(2t+1)^{3/2}}_{r^3(t)} - 1\Big)\,,$$

daher

$$r(\varphi) \;=\; (1+3\varphi)^{1/3}\,.$$

Beispiel 2.

Gegeben sei die von einem Parallelogramm mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$ und $(4,6)$ eingeschlossene Fläche K. Man berechne das Flächenintegral

$$\int_K (x+y)\, d(x,y)\,.$$

Hinweis: Man führe eine naheliegende, problemspezifische Koordinatentransformation durch, mittels der sich der Integrationsbereich auf eine möglichst einfache Gestalt transformiert (andere Lösungen werden nicht akzeptiert).

LÖSUNG

Man wählt ein schiefwinkeliges Koordinatensystem mit Ursprung $(1,1)$ und Achsen entlang der Kanten des Parallelogramms, um den Integrationsbereich auf das Einheitsquadrat in den neuen Koordinaten zu transformieren: Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} x(u,v) &= a_1 u + b_1 v + c_1 \\ y(u,v) &= a_2 u + b_2 v + c_2 \end{aligned}$$

soll gelten[1]

$$\begin{pmatrix} x(0,0) \\ y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(1,0) \\ y(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0,1) \\ y(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

und daraus ergibt sich $c_1 = c_2 = 1$ und weiter $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ und $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, also die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2\,u + v + 1 \\ y(u,v) &= u + 4\,v + 1 \end{aligned}\,, \qquad \text{mit} \quad \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 7\,.$$

Daher:

$$\int_K (x+y)\, d(x,y) = \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} 7\,((2\,u+v+1) + (u+4\,v+1))\, dv\, du = \ldots = 42\,.$$

[1] Dann gilt auch $\begin{pmatrix} x(1,1) \\ y(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Beispiel 3.

a) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{u}(t) + u(t) \;=\; (1-\varepsilon^2)\sin(\varepsilon t), \qquad u(0) = \dot{u}(0) = 0\,.$$

(Ein Ansatz für die Partikulärlösung ist hier leicht zu erraten.)

b) Man diskutiere den qualitativen Verlauf der Lösung $u(t)$ für die Fälle

(i) $0 < \varepsilon \ll 1$;

(ii) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; insbesondere gebe man hier die Periode der Lösung an, d.h. die *kleinste* Zahl $p > 0$ mit $u(t) = u(t+p)$ für alle t (genaue Begründung!);

(iii) (*) und ε knapp unter 1.

(*) Fall (iii) beschreibt ein bekanntes Phänomen, ist aber ist etwas subtil zu analysieren. Sie können sich hier zwei Extra-Bonuspukte verdienen; das Beispiel wird aber auch bei korrekter Beantwortung von a) und b) ((i)+(ii)) mit 6 Punkten angerechnet.

LÖSUNG

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet bekanntlich

$$u_h(t) \;=\; C_1 \sin t + C_2 \cos t\,.$$

Mit dem Ansatz $u_p(t) = a\,\sin(b\,t)$ für die Partikulärlösung muss gelten

$$\ddot{u}_p(t) + u_p(t) \;=\; a(-b^2+1)\sin(b\,t) \;\equiv!\,(1-\varepsilon^2)\sin(\varepsilon t),$$

daher $b = \varepsilon$ und $a = 1$, d.h. $u_p(t) = \sin(\varepsilon t)$.

Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ ergibt

$$u(t) \;=\; \sin(\varepsilon t) \;-\varepsilon\,\sin t\,.$$

b) (i) Für sehr kleines ε ist die Lösung eine ‘langsame’ Sinus-Schwingung, $\sin(\varepsilon t)$, überlagert von der kleinen ‘Störung’ $-\varepsilon \sin t$.

(ii) Hier ist

$$u(t) \;=\; \sin\Big(\frac{t}{2}\Big) \;-\frac{1}{2}\,\sin t \;=\; \sin\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big(1-\cos\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)$$

mit der Periode $p = 4\,\pi$.

(iii) (*) Für ε nahe an 1 ist die Lösung die Differenz zweier Sinus-Schwingungen mit annähernd gleicher Frequenz und Amplitude, eine sogenannte *Schwebung*. In Abhängigkeit von t löschen die beiden Amplituden einander aus oder verstärken einander (die ‘Einhüllende’ dieses Verlaufes ist eine langwellige Sinus-Schwingung mit Amplitude ≈ 2).