Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 23. Oktober 2007

Gruppe weiss *(mit Lösung)*

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Wir betrachten die Folge von bestimmten Integralen

$$I_n := \int_{t=0}^{\pi} t^n \sin t \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Man berechne I_0 und I_1.

b) Für $n \geq 2$ leite man eine Rekursionsformel der Gestalt

$$I_n = \alpha_n I_{n-1} + \beta_n I_{n-2} + \gamma_n$$

her, d.h. man gebe die betreffenden Koeffizienten α_n, β_n und γ_n an.

Anmerkung: Bei korrekter Rechnung stellt sich heraus, dass einer der drei gesuchten Koeffizienten für alle n verschwindet.

LÖSUNG

a) $I_0 = \int_{t=0}^{\pi} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_{t=0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$

Partielle Integration:

$$I_1 = \int_{t=0}^{\pi} \underbrace{t}_{u} \underbrace{\sin t}_{v'} \, dt = t(-\cos t)\Big|_{t=0}^{\pi} - \int_{t=0}^{\pi} 1 \cdot (-\cos t) \, dt$$

$$= \pi + \sin t \Big|_{t=0}^{\pi} = \pi$$

b) Zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{t=0}^{\pi} \underbrace{t^n}_{u} \underbrace{\sin t}_{v'} \, dt = t^n (-\cos t)\Big|_{t=0}^{\pi} - \int_{t=0}^{\pi} (n\, t^{n-1})(-\cos t) \, dt \\ &= \pi^n + n \int_{t=0}^{\pi} \underbrace{t^{n-1}}_{u} \underbrace{\cos t}_{v'} \, dt \\ &= \pi^n + n\, t^{n-1} \sin t \Big|_{t=0}^{\pi} - n \int_{t=0}^{\pi} ((n-1)\, t^{n-2}) \sin t \, dt \\ &= \pi^n + 0 - n(n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_n \equiv 0, \quad \beta_n = n(1-n), \quad \gamma_n = \pi^n$$

Bewertung: eher leicht, nur mit den Vorzeichen muss man aufpassen.