Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 6. November 2007

Gruppe blau *(mit Lösung)*

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Ein punktförmiger Eurofighter bewegt sich entlang der Bahnkurve [1]

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9\,t \\ 2+9\,t \\ \frac{1}{3}\,t^3 \end{pmatrix} \qquad (\,t = \text{Zeit}\,)\,.$$

Zu einem gewissen Zeitpunkt $t = t_{\text{fire}} > 0$ soll tangential zur Bahnkurve in Vorwärtsrichtung ein Geschoß abgefeuert werden.

a) Zu welchem Zeitpunkt $t_{\text{fire}} > 0$ muss der Abschuss erfolgen, damit das Geschoß die durch die Gleichung $x + y = 120 - z$ festgelegte Ebene E genau in rechtem Winkel durchschlägt?

b) Das Projektil bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit (absolut, nicht relativ zum Flugzeug gemessen), und zwar doppelt so schnell wie das Flugzeug zum Zeitpunkt $t = t_{\text{fire}}$. Man gebe eine Darstellung für seine Bahnkurve (Gerade) $\boldsymbol{s}(t)$ an, mit dem Startpunkt (Abschussposition) $\boldsymbol{s}(t_{\text{fire}}) = \boldsymbol{r}(t_{\text{fire}})$.

c) Man gebe die Koordinaten des Durchschusspunktes S (Punkt in der Ebene E) an.

LÖSUNG

a) Geschwindigkeitsvektor $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalvektor auf E ist gegeben durch $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$. Daher steht $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ orthogonal auf E für $t_{\text{fire}} = 3$ ($\dot{\boldsymbol{r}}(3)$ zeigt in die gleiche Richtung wie $\boldsymbol{n}$).

b) 'Schusslinie' (Gerade) $\boldsymbol{s}(t)$ = Tangente an $\boldsymbol{r}(t)$ zum Zeitpunkt $t = t_{\text{fire}} = 3$, mit $\boldsymbol{s}(3) = \boldsymbol{r}(3)$ und Geschwindigkeitsvektor $2\,\dot{\boldsymbol{r}}(3)$:

$$\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{r}(3) + (t-3)\,2\dot{\boldsymbol{r}}\,(3) = \begin{pmatrix} 28 \\ 29 \\ 9 \end{pmatrix} + (t-3)\,2 \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26+18\,t \\ -25+18\,t \\ -45+18\,t \end{pmatrix}$$

c) In der Darstellung $\boldsymbol{s}(t)$ aus b) ist der (Durchschuss-) Zeitpunkt t so zu bestimmen, dass $\boldsymbol{s}(t)$ die Gleichung der Ebene erfüllt, d.h.

$$(-26+18\,t) + (-25+18\,t) + (-45+18\,t) = 120 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \quad \Rightarrow \quad S = \boldsymbol{s}(4) = \begin{pmatrix} 46 \\ 47 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Bewertung: eher leicht.

[1] Orts- und Zeiteinheit sind irrelevant; es geht nur um die numerisch korrekte Rechnung.