

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 27. November 2007

Gruppe blau (*mit Lösung*)

— — *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* — —

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr

<i>Punkte</i> (max. 6)

Ein punktförmiger Eurofighter bewegt sich entlang der Bahnkurve C (angegeben in m),¹

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ m} + 2t \text{ m/s} \\ 2 \text{ m} + 4\sqrt{2}t \text{ m/s} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}t \sqrt{t} \text{ m/s}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad (t = \text{Zeit in s}).$$

Start zum Zeitpunkt $t = 0$.

- a) Nach welcher Wegstrecke erreicht das Flugzeug die Höhe $z = 81 \text{ m}$? (Gemeint ist die tatsächlich durchflogene, gekrümmte Wegstrecke im Raum, nicht ‘over ground’ oder so.)
- b) Man berechne $\int_C dx - dz$ entlang der Bahnkurve C von $t = 0 \dots 4$.

LÖSUNG

- a) Die Höhe $z(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}t \sqrt{t} = 81$ wird erreicht zum Zeitpunkt $t = 27$.

Tangential (= Geschwindigkeits) - Vektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t+48}.$$

Daher:

$$\text{Wegstrecke} = \text{Bogenlänge} = \int_{t=0}^{27} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{t=0}^{27} (t+48)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{3} (t+48)^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=0}^{27} = \textcolor{red}{183}.$$

- b) Direkte Berechnung des Kurvenintegrals:

$$\int_C dx - dz = \int_{t=0}^4 (\dot{x}(t) - \dot{z}(t)) dt = \int_{t=0}^4 \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t}\right) dt = 8 - 8 \frac{\sqrt{3}}{3},$$

oder mit dem Potential $\Phi(x, y, z) = x - z$:

$$\int_C dx - dz = \Phi(x(4), y(4), z(4)) - \Phi(x(0), y(0), z(0)) = \left(9 - 8 \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1 = 8 - 8 \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bewertung: mittel.

¹Die in $\mathbf{r}(t)$ auftretenden Konstanten sind korrekt dimensioniert, so dass $\mathbf{r}(t)$ die richtige Dimension hat. Für die Rechnung wird auf das Anschreiben der Orts- und Zeiteinheiten verzichtet, d.h. man gebe nur die entsprechenden Zahlenwerte an.