

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 27. November 2007

Gruppe weiß (*mit Lösung*)

— — kein Taschenrechner, keine Unterlagen — —

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Studium / MatrNr	<i>Punkte</i> (max. 6)

Ein punktförmiger Eurofighter bewegt sich entlang der Bahnkurve C (angegeben in m),¹

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\text{m} + t\text{ m/s} \\ 2\text{ m} + \sqrt{3}t\text{ m/s} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}t\sqrt{t}\text{ m/s}^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad (t = \text{Zeit in s}).$$

Start zum Zeitpunkt $t = 0$; aus der Angabe ist ersichtlich, dass das Flugzeug für $t > 0$ immer schneller wird.

- Nach welcher Wegstrecke erreicht das Flugzeug die Geschwindigkeit $v = 5\text{ m/s}$? (Gemeint ist die tatsächlich durchflogene, gekrümmte Wegstrecke im Raum, nicht ‘over ground’ oder so.)
- Man berechne $\int_C dy + dz$ entlang der Bahnkurve C von $t = 0 \dots 3$.

LÖSUNG

- Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$, Betrag der Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad v(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t + \frac{16}{3}} = 5 \quad \text{für } t = 28.$$

Daher:

$$\text{Wegstrecke} = \text{Bogenlänge} = \int_{t=0}^{28} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{t=0}^{28} \left(t + \frac{16}{3}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{3} \left(t + \frac{16}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=0}^{28} = 104.$$

- Direkte Berechnung des Kurvenintegrals:

$$\int_C dy + dz = \int_{t=0}^3 (\dot{y}(t) + \dot{z}(t)) dt = \int_{t=0}^3 \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t}\right) dt = 3 + 3\sqrt{3},$$

oder mit dem Potential $\Phi(x, y, z) = y + z$:

$$\int_C dy + dz = \Phi(x(3), y(3), z(3)) - \Phi(x(0), y(0), z(0)) = (5 + 3\sqrt{3}) - 2 = 3 + 3\sqrt{3}.$$

Bewertung: mittel.

¹Die in $\mathbf{r}(t)$ auftretenden Konstanten sind korrekt dimensioniert, so dass $\mathbf{r}(t)$ die richtige Dimension hat. Für die Rechnung wird auf das Anschreiben der Orts- und Zeiteinheiten verzichtet, d.h. man gebe nur die entsprechenden Zahlenwerte an.