Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

4. Test am 11. Dezember 2007

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

— — *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* — —

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**	*Punkte (max. 6)*

Man berechne den Flächeninhalt des von der geschlossenen Kurve C,

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sqrt{\sin(n\varphi)} \\ \sin\varphi\,\sqrt{\sin(n\varphi)} \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \Big[0, \frac{\pi}{n}\Big] \qquad (1 \le n \in \mathbb{N})$$

umrandeten ebenen Bereiches mittels eines Flächenintegrals.
(Eine grobe Skizze des Kurvenverlaufes ist hilfreich für die Anschauung.)

LÖSUNG

Die Kurve hat die Gestalt

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\,\cos\varphi \\ r(\varphi)\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $r(\varphi) = \sqrt{\sin(n\varphi)}$ = Abstand vom Nullpunkt. Daher in Polarkoordinaten, mit der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$:

$$\text{Fläche} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n}} \int_{r=0}^{\sqrt{\sin(n\varphi)}} r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n}} \Big[\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{\sqrt{\sin(n\varphi)}}\Big] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n}} \sin(n\varphi)\,d\varphi = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\,\cos(n\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{n}\,.$$

Bewertung: eher leicht.