Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

WS 2007/08

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

5. Test (16. Januar 2008)

Gruppe weiß (*mit Lösung*)

—— *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* ——

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**	*Punkte (max. 6)*

a) Man gebe eine Partikulärlösung $u = u_p(t)$ der inhomogenen Schwingungsgleichung mit exponentiell abklingender Erregung an:

$$\ddot{u} + \omega^2 u \;=\; e^{-t} \qquad (\,\omega > 0\,)\,.$$

b) Für beliebig vorgegebene Anfangswerte $u(0)$ und $\dot{u}(0)$ könnte man erwarten, dass jede Lösung der inhomogenen DGL für $t \to \infty$ gegen eine Lösung $u = u_h(t)$ der homogenen DGL (ohne äußere Erregung) konvergiert. Ist das tatsächlich richtig oder nicht? (Man formuliere eine kurze Begründung.)

Hinweis: Für die gesuchte Partikulärlösung verwende man den Ansatz $u_p(t) = \alpha\, e^{\beta\, t}$.

LÖSUNG

a) Ansatz $u = \alpha\, e^{\beta\, t} \quad \Rightarrow$

$$\ddot{u} + \omega^2 u \;=\; \alpha(\beta^2 + \omega^2)\, e^{\beta\, t} \;\equiv\; e^{-t}$$

... erzwingt $\alpha(\beta^2 + \omega^2) = 1$ und $\beta = -1$, also

$$u_p(t) \;=\; \frac{e^{-t}}{1 + \omega^2} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty\,.$$

b) Jede Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Gestalt

$$u(t) \;=\; \underbrace{C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)}_{=:\; u_h(t)} + u_p(t)\,, \qquad u_p(t) \;\; \text{aus a)},$$

wobei C_1 und C_2 durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Aufgrund von a) gilt tatsächlich immer

$$\lim_{t \to \infty} (u(t) - u_h(t)) \;=\; 0\,.$$

Bewertung: eher leicht.