Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 4. November 2008

Gruppe weiss (*mit Lösung*)

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

Ein Massepunkt bewege sich entlang der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ sowie die Position des Punktes zum Zeitpunkt $t = 2$ seien bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$. Bestimmen Sie weiters den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t sowie den Betrag der Geschwindigkeit bei $t = 2$.

b) Zum Zeitpunkt $t = 2$ verläßt der Punkt seine Bahn und setzt seinen Weg entlang der Tangente an die Kurve fort. Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Tangente an. An welchem Punkt durchstößt die Tangente die Ebene $3x + y - 2z = 7 - 2\sqrt{2}$?

LÖSUNG

a) Die Bahnkurve zum Zeitpunkt t ergibt sich durch Integrieren des Geschwindigkeitsvektors unter Ausnutzen der Anfangsbedingung an $t = 2$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\int\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ \frac{\pi}{2}\int\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\int\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt \end{pmatrix} = (\text{Substitution } w = \frac{\pi}{4}t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}2\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Differenzieren von $\mathbf{v}(t)$ liefert den Beschleunigungsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = (\text{Kettenregel}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{\pi^2}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\sqrt{2}\frac{\pi^2}{16}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{v}(2)| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\frac{\pi}{4} \\ 0 \\ -\sqrt{2}\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2\frac{\pi^2}{16} + 2\frac{\pi^2}{16}} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Tangente $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(2) + t \cdot \mathbf{v}(2)$. Da Zeitpunkt egal ist, kann man als Richtungsvektor auch den Vektor $(1, 0, 1)^T$ benutzen (muss aber nicht!).

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Komponenten in die Ebene $3x + y - 2z = 7 - 2\sqrt{2}$ liefert:

$$3t + 2 - 2\sqrt{2} - 2t = 7 - 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 5.$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ \sqrt{2} + 5 \end{pmatrix}.$$