Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada WS 2008/2009

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 19. November 2008

Gruppe blau *(mit Lösung)*

- kein Taschenrechner, keine Unterlagen -

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

a) Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfeldes $f(x, y, z) = e^{y+3}(3x + y^3 z)$. Welchen Wert nimmt der Gradient an der Stelle $(\frac{1}{3}, -3, 0)$ an? Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y, z)$ an der Stelle $(\frac{1}{3}, -3, 0)$ in Richtung des Vektors $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge jenes Teils der Parabel

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{12}(t^2 - 4) \end{pmatrix}$$

der unterhalb der x-Achse liegt. Nutzen Sie dazu die Formel

$$\int \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2 \ln{(t + \sqrt{t^2 + a^2})}) + C$$

um das Integral zu berechnen.

LÖSUNG

a)

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = e^{y+3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3x + y^3 z + 3y^2 z \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f(\frac{1}{3}, -3, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -27 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{3}\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot \nabla f = \frac{1}{3}\mathbf{a} \cdot \nabla f = -7 + \frac{2}{3}$$

b) Damit die Kurve unter der x-Achse liegt, muss $y(t) < 0$ gelten. D.h. $-2 < t < 2$. Die Bogenlänge für $t \in (-2, 2)$ ergibt sich aus folgendem Integral:

$$\int_{-2}^{2} \left| \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{36}} dt = \frac{1}{6} \int_{-2}^{2} \sqrt{36 + t^2} dt = (\text{Formel mit a} = 6) =$$

$$= \frac{1}{12}(2\sqrt{4 + 36} + 36 \ln{(2 + \sqrt{4 + 36})} + 2\sqrt{4 + 36}) - 36 \ln{(-2 + \sqrt{4 + 36})}) = \frac{1}{3}(2\sqrt{10} + 9 \ln{(\frac{\sqrt{10} + 1}{\sqrt{10} - 1})})$$