Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada WS 2008/2009

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 19. November 2008

Gruppe weiss *(mit Lösung)*

- kein Taschenrechner, keine Unterlagen -

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

a) Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfeldes $f(x,y,z) = e^{x-2}(3x^2y+2z)$. Welchen Wert nimmt der Gradient an der Stelle $(2,\frac{1}{2},0)$ an? Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z)$ an der Stelle $(2,\frac{1}{2},0)$ in Richtung des Vektors $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a} = (1,1,\sqrt{2})$.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge jenes Teils der Parabel

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{8}(t^2-9) \end{pmatrix}$$

der unterhalb der x-Achse liegt. Nutzen Sie dazu die Formel

$$\int \sqrt{t^2+a^2}dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2+a^2} + a^2 \ln(t+\sqrt{t^2+a^2})) + C$$

um das Integral zu berechnen.

LÖSUNG

a)

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = e^{x-2}\begin{pmatrix} 3x^2y+2z+6xy \\ 3x^2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f(2,\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{2}\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{e}\cdot\nabla f = \frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\nabla f = 12+\sqrt{2}$$

b) Damit die Kurve unter der x-Achse liegt, muss $y(t) < 0$ gelten. D.h. $-3 < t < 3$. Die Bogenlänge für $t \in (-3,3)$ ergibt sich aus folgendem Integral:

$$\int_{-3}^{3} \left|\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}\right| dt = \int_{-3}^{3}\sqrt{1+\frac{t^2}{16}}dt = \frac{1}{4}\int_{-3}^{3}\sqrt{16+t^2}dt = (\text{Formel mit a} = 4) =$$

$$= \frac{1}{8}(3\sqrt{9+16} + 16\ln(3+\sqrt{9+16}) + 3\sqrt{9+16}) - 16\ln(-3+\sqrt{9+16})) = \frac{1}{4}(15+16\ln(2))$$