

## PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 25. November 2008

Gruppe blau - *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* -

↑ <b>Name</b>	↑ <b>Vorname</b>	↑ <b>Kennz. / MatrNr.</b>	Punkte (max. 6)

1. Man berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes  $\mathbf{F}(x, y) = (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2))$  entlang der Spirale mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\pi}(t \cos t, t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2. Berechnen Sie weiters das Kurvenintegral von  $\mathbf{F}(x, y)$  entlang der Strecke von  $\mathbf{r}(0)$  nach  $\mathbf{r}(2\pi)$ .

### LÖSUNG

Zu berechnen ist folgendes Kurvenintegral:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

Das Berechnen der im Integral auftretenden Größen  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  und  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  liefert:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t) \left( \frac{t^2}{\pi^2} \cos^2 t + \frac{t^2}{\pi^2} \sin^2 t \right) = \frac{t^2}{\pi^2} \mathbf{r}(t),$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{t^2}{\pi^2} \left( \frac{t}{\pi^2} \cos^2 t - \frac{t^2}{\pi^2} \cos t \sin t + \frac{t}{\pi^2} \sin^2 t + \frac{t^2}{\pi^2} \cos t \sin t \right) = \frac{t^3}{\pi^4}.$$

Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{t^3}{\pi^4} dt = 4.$$

Eine Parameterdarstellung der Strecke von  $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$  nach  $\mathbf{r}(2\pi) = (2, 0)$  ist

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

also

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t) dt = \int_0^2 t^3 dt = 4.$$

Eine weitere Möglichkeit die Aufgabe zu lösen besteht darin das Vektorfeld als Gradientenfeld zu identifizieren. Ein mögliches Potential ist  $\Phi(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$  wie man durch Bildung des Gradienten verifizieren kann. Die Kurvenintegrale berechnen sich aufgrund der Wegunabhängigkeit einfacher:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \nabla \Phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}(t)) dt = \Phi(2, 0) - \Phi(0, 0) = 4$$

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \Phi(2, 0) - \Phi(0, 0) = 4$$

Die Parameterdarstellung beider Kurven  $\mathbf{s}$  wird nicht benötigt, nur das Potential.