Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada

WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

3. Test am 25. November 2008

Gruppe weiss - *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* -

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

1. Man berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x,y) = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2})$ entlang der Spirale mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(t) = \frac{3}{\pi}(t\sin t, t\cos t),\ \ 0 \le t \le \pi.$$

2. Berechnen Sie weiters das Kurvenintegral von $\mathbf{F}(x,y)$ entlang der Strecke von $\mathbf{r}(0)$ nach $\mathbf{r}(\pi)$.

LÖSUNG

Zu berechnen ist folgendes Kurvenintegral:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)dt$$

Das Berechnen der im Integral auftretenden Größen $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ und $\dot{\mathbf{r}}(t)$ liefert:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t)(\frac{3t}{\pi}\cos^2 t + \frac{3t}{\pi}\sin^2 t) = \frac{3t}{\pi}\mathbf{r}(t),$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{3}{\pi}\begin{pmatrix} \sin t + t\cos t \\ \cos t - t\sin t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{27t^2}{\pi^3}(\sin^2 t + t\sin t\cos t + \cos^2 t - t\sin t\cos t) = \frac{27t^2}{\pi^3}.$$

Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)dt = \int_0^\pi \frac{27t^2}{\pi^3}dt = 9.$$

Eine Parameterdarstellung der Strecke von $\mathbf{r}(0) = (0,0)$ nach $\mathbf{r}(\pi) = (3,0)$ ist

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \le t \le 3.$$

also

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t) dt = \int_0^3 t^2 dt = 9.$$

Eine weitere Möglichkeit die Aufgabe zu lösen besteht darin das Vektorfeld als Gradientenfeld zu identifizieren. Ein mögliches Potential ist $\Phi(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)}^3$ wie man durch Bildung des Gradienten verifizieren kann. Die Kurvenintegrale berechnen sich aufgrund der Wegunabhängigkeit einfacher:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^\pi \nabla\Phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^\pi \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t)) dt = \Phi(3,0) - \Phi(0,0) = 9$$

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \Phi(3,0) - \Phi(0,0) = 9$$

Die Parameterdarstellung beider Kurven $\mathbf{s}$ wird nicht benötigt, nur das Potential.