

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

4. Test am 9. Dezember 2008

Gruppe weiss - *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* -

↑ Name	↑ Vorname	↑ Kennz. / MatrNr.	Punkte (max. 6)

Der Bereich B wird von dem Paraboloid $z = -(x^2 + y^2)$ und der Ebene $z = -1$ begrenzt. Berechnen Sie

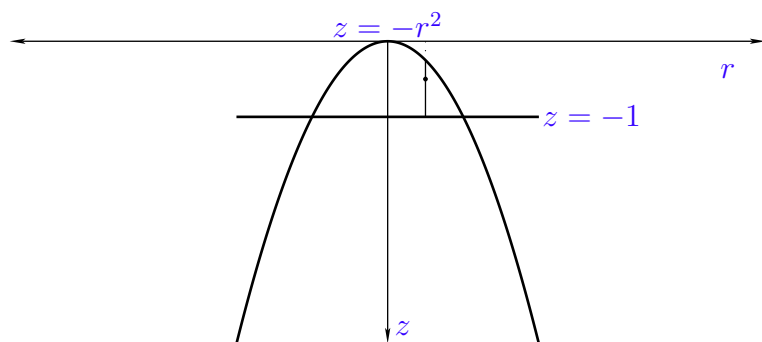
$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2} dV$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Fertigen Sie eine Skizze des Integrationsbereiches an.
2. Geben Sie Ungleichungen für die Grenzen Ihrer Integrationsvariablen an.
Hinweis: Verwenden Sie Zylinderkoordinaten.
3. Berechnen Sie das Integral.

LÖSUNG

1.



2. Nach Substitution in Zylinderkoordinaten ergibt sich für die Grenzen φ, r und z gemäß obiger Skizze:

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad -1 \leq z \leq -r^2.$$

3. Unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante r ergibt sich für das Integral:

$$\begin{aligned}\int_B \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^{-r^2} r^2 dz dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(r^2(-r^2) + r^2 \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^4) dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$