Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger, M. Aurada WS 2008/09

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

5. Test am 14. Januar 2009

Gruppe blau - *kein Taschenrechner, keine Unterlagen* -

↑ **Name**	↑ **Vorname**	↑ **Kennz. / MatrNr.**	Punkte (max. 6)

a. Gegeben sei die homogene Differentialgleichung:

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0.$$

Bestimmen Sie eine Lösungsbasis und stellen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ als Linearkombination dieser Basisfunktionen dar.

b. Lösen Sie das inhomogene Problem

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = e^{-3t}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \frac{1}{6}$ und $\dot{x}(0) = \frac{1}{3}$.

LÖSUNG

a. Die Gleichung hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ mit den Nullstellen 3 und -2. Daher sind die Basisfunktionen $x_1(t) = e^{3t}$ und $x_2(t) = e^{-2t}$. Jede Lösung der homogenen Gleichung kann als Linearkombination dieser Basisfunktionen dargestellt werden.

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}.$$

b. Das homogene Problem ist bereits gelöst. Die allgemeine Lösung lässt sich als Summe eines homogenen Anteils x_h und eines partikulären Anteils x_p schreiben. Eine Partikulärlösung kann man mittels des Ansatzes $x_p(t) = ae^{bt}$ berechnen. Einsetzen liefert:

$$ab^2e^{bt} - abe^{bt} - 6ae^{bt} = e^{-3t}.$$

Also muss $b = -3$ und $ab^2 - ab - 6a = 1$ gelten damit der Ansatz die Gleichung löst. Man erhält $a = \frac{1}{6}$ also $x_p(t) = \frac{1}{6}e^{-3t}$ als Partikulärlösung. Eine andere Möglichkeit eine Partikulärlösung zu finden ist mittels Variation der Konstanten $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$. Durch Einführen der Bedingung $\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0$ und Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man das System

$$\begin{aligned} x_1\dot{c}_1 + x_2\dot{c}_2 &= 0 \\ \dot{x}_1\dot{c}_1 + \dot{x}_2\dot{c}_2 &= e^{-3t} \end{aligned}$$

Auflösen nach $\dot{c}_1$ und $\dot{c}_2$ sowie integrieren (als Integrationskonstante 0 wählen) ergibt hier genau die Partikulärlösung die man auch mit dem Ansatz erhalten hätte.
Die Lösung hat also die Gestalt:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^{-3t}.$$

Die Konstanten c_1 und c_2 können durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{6} = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} \\ \dot{x}(0) &= \frac{1}{3} = 3c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man $c_1 = \frac{1}{6}$ und $c_2 = -\frac{1}{6}$. Die Lösung lautet daher:

$$x(t) = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{6} e^{3t}.$$