PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (19. März 2010)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner;* *Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 18)*		

Aufgabe 1.
Der Bereich B wird von dem Paraboloid $x^2 + y^2 = 4z - 4$ und der Ebene $z = 2$ begrenzt.
Die rechte Hälfte des Paraboloids B_1 (in der $x > 0$ ist) besitzt konstante Dichte ρ. Die linke Hälfte B_2 ($x < 0$) ist ebenfalls homogen, jedoch mit der doppelten Dichte: 2ρ.
Weiters sei die Masse m_B von B gegeben: $m_B = 3\pi\rho$.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts von B.
Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

1. Denken Sie sich nun B in seine Hälften B_1 und B_2 geteilt, siehe Abbildung 1. Geben Sie Ungleichungen für die Grenzen Ihrer Integrationsvariablen in B_1 sowie in B_2 an.

2. Berechnen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts von B mit Hilfe der Integrale $\int_{B_1} \rho x dV$ und $\int_{B_2} 2\rho x dV$.

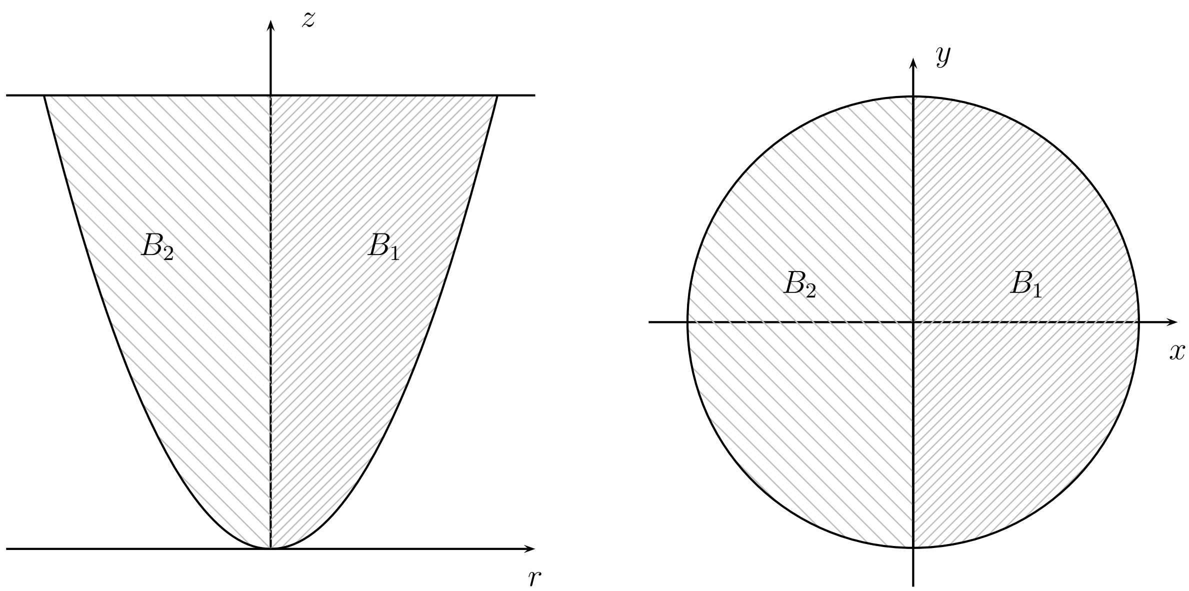

Abbildung 1: Skizze zweier Schnitte des Paraboloids

LÖSUNG

1. Nach Substitution in Zylinderkoordinaten mit z als Drehachse ergibt sich für die Grenzen φ, r und z von B_1 und B_2 gemäß obiger Skizze:
   Grenzen von B_1:
   $$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2,\ 1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq r \leq \sqrt{4z-4}.$$
   Grenzen von B_2:
   $$\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2,\ 1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq r \leq \sqrt{4z-4}.$$

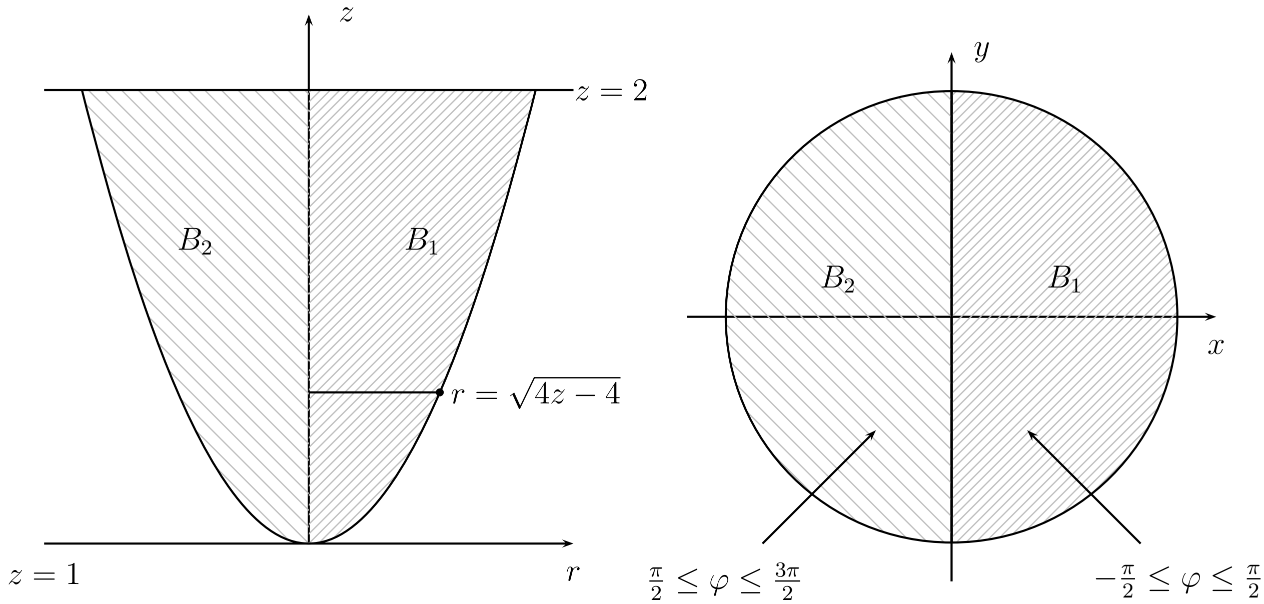

Abbildung 2: Skizze zweier Schnitte des Paraboloids

2. Unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante r und dem transformierten Integranden $x = r\cos\varphi$ ergibt sich für das Integral über B_2:

$$\begin{aligned}
\int_{B_2} x2\rho dV &= 2\rho \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4z-4}} r^2 \cos\varphi dr dz d\varphi \\
&= 2\rho \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4z-4}} r^2 dr dz \\
&= -2\frac{2\rho}{3} \int_1^2 (4z-4)^{\frac{3}{2}} dz = (\text{Nach Substitution } 4z-4=v) \\
&= -2\frac{\rho}{15}(8-4)^{\frac{5}{2}} = -2\frac{32\rho}{15}
\end{aligned}$$

Das Integral über B_1 ist ähnlich zu berechnen. Man muss nur 2ρ durch ρ ersetzen und das Integral über φ neu berechnen: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2$. Daher ist $\int_{B_2} x2\rho dV = \frac{32\rho}{15}$.
Die x-Koordinate des Schwerpunkts ergibt sich nun indem man die Summe dieser beiden Integrale durch die Masse von B dividiert:

$$S_x = \frac{\int_{B_1} x\rho dV + \int_{B_2} x2\rho dV}{m_B} = -\frac{\frac{32\rho}{15}}{3\pi\rho} = -\frac{32}{45\pi}.$$

Aufgabe 2. Drei Differentialgleichungen verschiedenen Typs.

a.) Gegeben sei die nichtlineare Differentialgleichung

$$xy' = \frac{y^2}{\ln x} \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(e) = -1, \tag{2}$$

wobei mit e die Eulersche Zahl bezeichnet werde. Geben Sie die Lösung $y = y(x)$ von (1) und (2) an. Verwenden Sie die Methode der Trennung der Variablen.
Hinweis: Auftretende Integrale lassen sich mittels Substitution lösen.

b.) Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$16y'' + 24y' + 9y = 0. \tag{3}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung von (3) an.

c.) Gegeben sei das skalare Feld

$$\Phi(x, y) = \ln(7x^2 - 5x + 3)\sin(y^2). \tag{4}$$

Geben Sie eine exakte Differentialgleichung an, die (4) als erstes Integral besitzt.

LÖSUNG

a.)

$$\begin{aligned} xy' &= \frac{y^2}{\ln x} \\ \frac{y'}{y^2} &= \frac{1}{x \ln x} \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dx}{x \ln x} \end{aligned}$$

Die Integrale werden nun wie folgt gelöst.

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \qquad \text{und}$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi & = & \ln x \\ d\xi & = & \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{d\xi}{\xi} = \ln|\xi| + c = \ln|\ln x| + c.$$

Einsetzen ergibt daher

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y} &= \ln|\ln x| + c \\ y &= -\frac{1}{\ln|\ln x| + c}. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung (2) gilt nun

$$-1 = y(e) = -\frac{1}{\ln|\ln e| + c} = -\frac{1}{\ln|1| + c} = -\frac{1}{c}.$$

Also erhält man $c = 1$ und die Lösung lautet somit

$$y(x) = -\frac{1}{\ln|\ln x| + 1}.$$

b.) Das charakteristische Polynom von (3) lautet

$$16\lambda^2 + 24\lambda + 9 = 0.$$

Mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die doppelte Nullstelle $\lambda = -\frac{3}{4}$. Die allgemeine Lösung von (3) lässt sich daher durch (siehe Skriptum)

$$y(x) = Ae^{-3/4x} + Bxe^{-3/4x} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

darstellen.

c.) Die allgemeine Form einer exakten Differentialgleichung, die das Skalarfeld $\Phi = \Phi(x,y)$ als erstes Integral besitzt, lautet

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0,$$

wobei

$$p(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad q(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

gilt. Damit sind also nur die partiellen Ableitungen von Φ zu berechnen und man erhält

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{(14x-5)\sin(y^2)}{7x^2 - 5x + 3} \quad \text{und} \\ q(x,y) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\ln(7x^2 - 5x + 3)y\cos(y^2) \end{aligned}$$

und damit die Differentialgleichung

$$\frac{(14x-5)\sin(y^2)}{7x^2 - 5x + 3}dx + 2\ln(7x^2 - 5x + 3)y\cos(y^2)dy = 0.$$

Aufgabe 3.

a) Die Kurve C_1 sei gegeben durch

$$C_1 \;=\; \left\{ \boldsymbol{r}_1(u) := \left(\begin{array}{c} \sqrt{3}\,u^2 \cos u \\ \sqrt{3}\,u^2 \sin u \\ u^3 \end{array} \right), \quad 0 \le u \le u_{end} \right\}.$$

Man gebe die Parametrisierung $\tilde{\boldsymbol{r}}_1$ dieser Kurve nach der Bogenlänge an.

b) Gegeben sei das ebene Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y) = (\varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y))$ mit $\varphi(x,y) := 7\,x^3 y^3$, und die ebene Kurve durch $\boldsymbol{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau)) := (\tau\sqrt{\tau}, \sqrt{\tau})$. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals

$$I(t) \;:=\; \int_{C(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

entlang des Kurvenabschnittes $C(t) = \{\boldsymbol{r}(\tau),\ 0 \le \tau \le t\}$, als Funktion in Abhängigkeit von t.

LÖSUNG

a) Bogenlänge als Funktion von u:

$$s(u) = \int_{v=0}^{u} |\boldsymbol{r}_1'(v)|\,dv, \qquad \text{mit } |\boldsymbol{r}_1'(v)| = \left| \left(\begin{array}{c} 2\sqrt{3}\,v\cos v - \sqrt{3}\,v^2 \sin v \\ 2\sqrt{3}\,v \sin v + \sqrt{3}\,v^2 \cos v \\ 3\,v^2 \end{array} \right) \right| = \;\ldots\; = \; 2\sqrt{3}\,v\,\sqrt{1+v^2},$$

also

$$\begin{aligned} s(u) \;&=\; 2\sqrt{3} \int_{v=0}^{u} v\,\sqrt{1+v^2}\,dv = \;[\text{Substitution } 1+v^2 = \xi,\ 2v\,dv = d\xi\,] \\ &=\; \sqrt{3} \int_{\xi=1}^{1+u^2} \sqrt{\xi}\,d\xi = \sqrt{3}\,\frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\xi=1}^{1+u^2} = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left((1+u^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Inversion dieses Zusammenhanges (Auflösen nach $s \ge 0$) ergibt

$$u = u(s) = \sqrt{\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}s\right)^{\frac{2}{3}} - 1}\,,$$

und Einsetzen in die gegebene Parameterdarstellung für C_1 ergibt die Parametrisierung über die Bogenlänge als $\tilde{\boldsymbol{r}}_1(s) = \boldsymbol{r}_1(u(s))$.

b) Laut Angabe ist $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$ ein Gradientenfeld $\quad\Rightarrow$

$$I(t) = \varphi(\boldsymbol{r}(t)) - \varphi(\boldsymbol{r}(0)) = 7\,(t\,\sqrt{t})^3\,(\sqrt{t})^3 - 0 = 7\,t^6\,.$$