Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2011/12

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Haupttest (16. Dezember 2011)

Gruppe bunt *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

—— *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* ——

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines punktförmigen Basketballspielers sowie seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} e^t t^2 \\ 3t^2 - 4t + 1 \\ 2t + 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des Basketballspielers. (*Hinweis: partielle Integration)*

b) Zum Zeitpunkt $t = 2$ wirft der Basketballspieler einen Ball genau entlang seiner Bewegungsrichtung, mit der doppelten seiner eigenen Geschwindigkeit (also $|\mathbf{v}_{Ball}| = 2|\mathbf{v}(2)|$). Stellen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r_B}(t)$ des Balles auf. Gehen Sie von einer geradlinigen, gleichförmigen Bewegung aus. *(Hinweis: $r(2) = (2e^2, 3, 19)$)*

c) Die Ebene der rechten Outlinie ist gegeben durch die Richtungsvektoren

$$\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den Punkt $P = (5, 33, 127)$.
Stellen Sie die Ebenengleichung in der Form $ax + by + cz = d$ auf.
Zu welchem Zeitpunkt und in welchem Punkt überquert der Ball die rechte Outlinie (d.h. schneidet die Ebene)?

d) Geben Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Basketballspielers zwischen den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_1 = 2$ an.

LÖSUNG

a) Die Bestimmung der Bahnkurve aus der Geschwindigkeit und einem gegebenen Anfangspunkt erfolgt mit

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\, dt$$

bzw. durch unbestimmtes Integrieren von $\mathbf{v}(t)$ und anschließendes Anpassen der Integrationskonstante an die Anfangsbedingung $\mathbf{r}(0)$. Integral der x-Komponente von $\mathbf{v}(t)$:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^t}_{u'} \underbrace{t^2}_{v} dt &= \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{t^2}_{v} - \int \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{2t}_{v'} dt + C_1 = e^t t^2 - 2 \int \underbrace{e^t}_{u'} \underbrace{t}_{v} dt + C_1 = \\ &= e^t t^2 - 2 \left(\underbrace{e^t}_{u} \underbrace{t}_{v} - \int \underbrace{e^t}_{u} \underbrace{1}_{v'} dt \right) + C_1 = e^t t^2 - 2 \left(e^t t - e^t \right) + C_1 = \\ &= e^t t^2 - 2e^t t + 2e^t + C_1 = e^t (t^2 - 2t + 2) + C_1 \end{aligned}$$

y-Komponente:

$$\int (3t^2 - 4t + 1)\, dt = 3 \int t^2\, dt - 4 \int t\, dt + \int 1\, dt = 3\frac{t^3}{3} - 4\frac{t^2}{2} + t + C_2 = t^3 - 2t^2 + t + C_2$$

z-Komponente:

$$\int (2t+5)\,dt = 2\int t\,dt + 5\int 1\,dt = 2\frac{t^2}{2} + 5t + C_3 = t^2 + 5t + C_3$$

Somit gilt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(t^2-2t+2) \\ t^3-2t^2+t \\ t^2+5t \end{pmatrix} + \mathbf{C}$$

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dadurch ergibt sich

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sowie für die Bahnkurve des Basketballspielers:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(t^2-2t+2) \\ t^3-2t^2+t+1 \\ t^2+5t+5 \end{pmatrix}$$

b) Um die Tangente zum Zeitpunkt $t = 2$ aufstellen zu können, brauchen wir den Punkt $\mathbf{r}(2)$ und die Ableitung zu diesem Zeitpunkt $\mathbf{r}'(2) = \mathbf{v}(2)$.

$$\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 4e^2 \\ 3\cdot 4 - 4\cdot 2 + 1 \\ 2\cdot 2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} e^2\cdot(4-4+2) \\ 8-8+2+1 \\ 4+10+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Da der Ball die doppelte Geschwindigkeit des Spielers haben soll, ist der Richtungsvektor der Tangente $2\cdot\mathbf{v}(2)$:

$$\mathbf{r_B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^2 \\ 3 \\ 19 \end{pmatrix} + 2(t-2)\begin{pmatrix} 4e^2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Für die Ebenengleichung benötigt man zuerst den Normalvektor:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{P}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 127 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$33 - y = 0$$

Den Schnittpunkt erhalten wird durch Einsetzen der Bahnkurve des Balles in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 33-(3+10(t-2)) &= 0 \\ 30-10t+20 &= 0 \\ 10t &= 50 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

Das ergibt den Schnittpunkt: $(26e^2, 33, 73)$

d) Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$\frac{\mathbf{r}(t_1)-\mathbf{r}(t_0)}{t_1-t_0} = \begin{pmatrix} e^2-1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

Ein Draht ist gegeben durch seine Form $\mathbf{r}(t)$. Auf ihn wirkt ein (elektrisches) Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, z)$.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 2y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $E(x, y, z)$, sodass $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla E(x, y, z)$ sowie $E(0, 0, 0) = 0$ gelten.

b) Bestimmen Sie die potentielle Energie des gesamten Drahtstückes $E_{Draht} = \int_C E\, ds$ in der Position $\mathbf{r}_1(t)$. E ist die in a) berechnete potentielle Energie.

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{r}(t).$$

c) Welche Arbeit verrichtet das Feld $\mathbf{F}(x, y, z)$ an einem Massepunkt, der sich längs der Kurve $\mathbf{p}(t)$ vom Punkt $\mathbf{t}_0 = 2$ zum Punkt $\mathbf{t}_1 = 5$ bewegt?

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t+5 \\ t^2+t \end{pmatrix}$$

LÖSUNG

a) Zur Bestimmung des Potentials integrieren wir die einzelnen Komponenten nach ihrer Koordinate und setzen die Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 2x+z \quad \Rightarrow E = \int (2x+z)\,dx = x^2 + xz + C(y,z) \\ \frac{dF}{dy} &= 2y \quad \Rightarrow E = \int 2y\,dy = y^2 + C(x,z) \\ \frac{dF}{dz} &= x \quad \Rightarrow E = \int x\,dz = xz + C(x,y) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $E(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz + C$. Für $E(0, 0, 0) = 0$ ist $C = 0$.

b) Wir berechnen $E_1 = \int E(r_1(t)) \cdot |r_1'(t)|\, dt$:

$$r_1'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |r_1'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} E(r_1(t)) \cdot |r_1'(t)|\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((5+\sin t)^2 + \cos^2 t + 2t(5+\sin t))\sqrt{5}\, dt = \\
&= \sqrt{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (25 + 10\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2t\sin t + 10t)\, dt = \\
&= \sqrt{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (26 + 10\sin t + 2t\sin t + 10t)\, dt = \\
&= \sqrt{5}(26t - 10\cos t + 2\sin t - 2t\cos t + 5t^2)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= \sqrt{5}\left(26\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 2(-2) + 5\left(\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right) = \sqrt{5}(26\pi - 4 + 10\pi^2)
\end{aligned}
$$

c) $E(p(t_1)) - E(p(t_0)) = E(1,10,30) - E(1,7,6) = (1+100+30) - (1+49+6) = 131 - 56 = 75$

Aufgabe 3.

Die Bahnkurve eines Wagens auf der neuen, spiralförmigen Hochschaubahn im Wiener Prater besitzt die Darstellung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^n \sin t \\ t^n \cos t \\ \sqrt{3}(30^n - t^n) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 30 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Berechnen Sie das differentielle Bogenelement ds für allgemeines n. Verwenden Sie in allen folgenden Beispielen $n = 2$.

b) Für $n = 2$ ergibt sich $ds = \sqrt{16t^2 + t^4}\,dt$. Berechnen Sie die Bogenlänge S der Kurve.

c) Das gegebene Feld $\mathbf{F}$ ist ein Gradientenfeld. Berechnen Sie $E_{pot}(\mathbf{r})$, sodass gilt: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla E_{pot}(\mathbf{r})$ und $E_{pot}(\mathbf{r}(0)) = 0$. Das Feld lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

d) Wie groß ist die vom Kraftfeld $\mathbf{F}$ am Wagen verrichtete Arbeit zwischen Anfangspunkt und Endpunkt $\Delta E = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$?

e) Die Summe aus kinetischer Energie in z-Richtung $E^z_{kin} = \frac{mv_z^2}{2}$ und potentieller Energie $E_{pot}(\mathbf{r}(t))$ aus c) ist eine Erhaltungsgröße (v_z ist die z-Komponente der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ des Wagens). Zeigen Sie, dass folgende Größe mit $g = \frac{6}{\sqrt{3}}$ nicht von der Zeit abhängt:

$$E^z_{ges} = E^z_{kin} + E_{pot} = \frac{mv_z(t)^2}{2} + E_{pot}(\mathbf{r}(t))$$

Hinweis: Wenn Ihr Ergebnis Ausdrücke wie 30^2 oder $(15 + \frac{2}{3})^2$ beinhaltet, müssen Sie diese nicht weiter ausrechnen.

LÖSUNG

a) Die infinitesimale Bogenlänge errechnet sich durch die übliche Formel

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt = \left| \begin{pmatrix} n\,t^{n-1}\sin t + t^n \cos t \\ n\,t^{n-1}\cos t - t^n \sin t \\ -\sqrt{3}n\,t^{n-1} \end{pmatrix} \right| dt$$

$$= \sqrt{(n\,t^{n-1}\sin t + t^n\cos t)^2 + (n\,t^{n-1}\cos t - t^n \sin t)^2 + (\sqrt{3}n\,t^{n-1})^2}\,dt$$

$$= \sqrt{4n^2\,t^{2n-2} + t^{2n}}\,dt = t^{n-1}\sqrt{4n^2 + t^2}\,dt$$

b) Die Auswertung des Integrals für die gesamte Bogenlänge läuft folgendermaßen ab:

$$S = \int ds = \int_0^{30} |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^{30} \sqrt{16t^2 + t^4}\,dt = \int_0^{30} t\sqrt{16 + t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} u = 16 + t^2 \\ du = 2t\,dt \end{matrix} \right|$$

$$= \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{2} u^{1/2}\,du = \left| \frac{1}{2}\frac{2}{3} u^{3/2} \right|_{u_0}^{u_1} = \left| \frac{1}{2}\frac{2}{3}(16 + t^2)^{3/2} \right|_{t=0}^{t=30} = \frac{1}{3}\left[(16 + 30^2)^{3/2} - 64\right]$$

c) Da x- und y-Koordinate des Feldes 0 sind, ist $E_{pot}(\mathbf{r}) = \int dz\, F_z = \int dz\, mg = mgz + C$. Zusätzlich soll gelten, dass $mgz(t=0) + C = 0$, also ergibt sich unter Berücksichtigung von $z(t=0) = \sqrt{3}\,30^2$ durch Umformen $C = -mg\sqrt{3}\,30^2$ und damit $E_{pot}(\mathbf{r}) = mg(z - \sqrt{3}\,30^2)$.

d) Somit ist der Wert des Kurvenintegrals

$$\Delta E = \int_0^{30} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_{pot}(\mathbf{r}(30)) - E_{pot}(\mathbf{r}(0)) = mg(r_z(30) - r_z(0)) = -mg\,30^2\sqrt{3}$$

e) Aus a) ist bekannt, dass $v_z(t) = r_z'(t) = -2\sqrt{3}t$. Für die potentielle Energie ergibt sich durch Einsetzen der Bahnkurve (insbesondere der z-Komponente) $E_{pot}(\mathbf{r}(t)) = mg(z(t) - \sqrt{3}\,30^2) = mg(\sqrt{3}(30^2 - t^2) - \sqrt{3}\,30^2) = -\sqrt{3}mgt^2$. Die angegebene Größe E_{ges}^z lautet also mit $g = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$$E_{ges}^z = \frac{mv_z(t)^2}{2} + E_{pot}(\mathbf{r}(t)) = \frac{12mt^2}{2} - \sqrt{3}mgt^2 = 0$$

und hängt damit nicht von der Zeit ab.