

# PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

Nachtest (8. März 2013)

Gruppe bunt (*mit Lösung*)

↑ <b>FAMILIENNAME</b>	↑ <b>Vorname</b>	↑ <b>Studium / MatrNr</b>

— — *kein Taschenrechner; Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\Sigma$ (max. 30)		

## Aufgabe 1.

1. (7 Punkte) Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_K dV,$$

wobei  $K$  der durch die Ungleichungen  $x, y, z \leq 0$  und  $x + y + z \geq -1$  bestimmte Körper ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Fertigen Sie eine Skizze des Integrationsbereiches an.
  - Geben Sie Ungleichungen für die Grenzen Ihrer Integrationsvariablen an.
  - Berechnen Sie das Integral.
2. (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0, \quad x > 0. \quad (1)$$

## LÖSUNG

1. a)

- b) Gemäß obiger Skizze kann man ablesen, dass für  $z$  gilt:

$$-1 \leq z \leq 0.$$

Bei fest gewähltem  $z$  kann für  $y$  nur noch

$$-1 - z \leq y \leq 0$$

gelten. Sind  $z$ - und  $y$ -Komponente fixiert, so ergibt sich für die  $x$ -Komponente der Bereich

$$-1 - z - y \leq x \leq 0.$$

- c) Nach b) sieht das Integral wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \int_K dV &= \int_{-1}^0 \int_{-1-z}^0 \int_{-1-y-z}^0 dx dy dz \\ &= \int_{-1}^0 \int_{-1-z}^0 (1 + y + z) dy dz \\ &= - \int_{-1}^0 \left( (-1 - z) + \frac{(-1 - z)^2}{2} + (-1 - z)z \right) dz \\ &= \int_{-1}^0 \left( 1 + 2z + z^2 - \frac{(1 + z)^2}{2} \right) dz \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(1 + z)^2}{2} dz = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. Um die Lösung zu bestimmen wird zuerst  $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx$  integriert

$$\int \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx = x - \frac{y}{x} + C(y). \quad (2)$$

Das wird wieder nach  $y$  abgeleitet und mit  $-\frac{1}{x}$  verglichen um die Konstante  $C(y)$  zu bestimmen,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x - \frac{y}{x} + C(y)\right) = -\frac{1}{x} + C'(y) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{x}. \quad (3)$$

Daraus folgt  $C'(y) = 0$ , die Lösung der DGL ist also gegeben durch  $x - \frac{y}{x} = c$ .

## Aufgabe 2.

a) (7 Punkte) Die Bahnkurve  $C$  eines Massepunktes sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ (\exp(t))^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bestimmen Sie die Parametrisierung von  $C$  nach der Bogenlänge sowie die Bogenlänge von  $C$ .

b) (3 Punkte) Elektrische Feldlinien  $\mathbf{r}(s)$  sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)),$$

wobei  $\Phi(\mathbf{r})$  das elektrostatische Potential ist. Berechnen Sie alle Feldlinien  $\mathbf{r}(s)$  für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}.$$

## LÖSUNG

a) Für die Bogenlänge bis  $t = \tau$  ist das Integral  $\int_C d\mathbf{r} = \int_0^\tau |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$  zu berechnen. Dabei ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \exp(2t) \\ 3 \exp(3t) \end{pmatrix}$$

und

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = (9 \exp(6t) + 4 \exp(4t))^{1/2} = \exp(2t) \sqrt{9 \exp(2t) + 4}.$$

Die Bogenlänge  $s(\tau)$  bis  $t = \tau$  lautet dann:

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \int_0^\tau \exp(2t) \sqrt{9 \exp(2t) + 4} dt = \left| \begin{array}{l} 9 \exp(2t) + 4 = v \\ 18 \exp(2t) dt = dv \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{18} \int v^{1/2} dv = \frac{1}{27} (9 \exp(2t) + 4)^{3/2} \Big|_{t=0}^\tau = \frac{1}{27} ((9 \exp(2\tau) + 4)^{3/2} - 13^{3/2}). \end{aligned}$$

Umformen nach  $\tau = \tau(s)$  ergibt

$$\tau(s) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(27s + 13^{3/2})^{2/3} - 4}{9} \right)$$

und damit die Parametrisierung  $\tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(\tau(s))$  nach der Bogenlänge:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s) = \begin{pmatrix} w(s)^{1/2} \\ w(s)^{3/2} \end{pmatrix}$$

mit

$$w(s) = \frac{(27s + 13^{3/2})^{2/3} - 4}{9}.$$

Die Bogenlänge ist  $s(1) = \frac{1}{27} ((9 \exp(2) + 4)^{3/2} - 13^{3/2})$ .

b)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von  $\nabla\Phi$  in die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)) = \begin{pmatrix} 2x(s) \\ 2y(s) \\ 2z(s) \end{pmatrix}.$$

Das sind drei voneinander unabhängige Differentialgleichungen 1. Ordnung, die idente Form besitzen.  $x(s)$  ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{dx}{ds} = 2x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 2 ds$$

$$\ln x + \tilde{A} = 2s$$

$$x(s) = A \exp(2s).$$

Analog sind die Lösungen für die anderen Koordinaten  $y(s) = B \exp(2s)$  und  $z(s) = C \exp(2s)$ . Beachten Sie, dass es drei verschiedene Konstanten gibt, weil die Gleichungen voneinander völlig unabhängig sind. Damit lautet die Lösung:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \exp(2s).$$

Es handelt sich bei den Feldlinien um Geraden mit dem Richtungsvektor  $(A, B, C)$ , die bei  $s = -\infty$  im Ursprung beginnen und sternförmig auseinandergehen.

### Aufgabe 3.

Eine Münze wird 3000 Mal geworfen. Wir vermuten, dass die Münze nicht fair ist. Man teste die Nullhypothese, dass die Münze fair ist, also einer Binomialverteilung  $B(3000, \frac{1}{2})$  gehorcht. Bei wie wenigen bzw. wie vielen Ergebnissen von 'Kopf' können wir auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.05$  davon ausgehen, dass die Münze nicht fair ist?

*Hinweis: Verwenden Sie den Satz von de Moivre/Laplace. Untenstehend ist eine Wertetabelle für die Standardnormalverteilung angegeben. Dabei ist in den Spalten die zweite Nachkommastelle von  $z$  aufgetragen, für die in den Zeilen der Platzhalter \* steht.*

Tabelle Standardnormalverteilung – Wikipedia

$z \setminus *$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1*	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2*	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3*	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4*	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5*	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6*	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7*	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8*	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9*	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0*	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1*	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2*	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3*	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4*	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5*	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6*	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7*	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8*	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9*	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0*	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1*	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2*	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3*	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4*	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5*	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6*	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7*	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8*	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9*	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0*	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900

## LÖSUNG

Wir wollen  $H_0$  verwerfen, falls "Kopf" entweder sehr selten oder sehr oft vorkommt, d.h. falls

$$\sum_{k=0}^{\Gamma} P(x = k) \leq 0.025 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=\Delta}^{3000} P(X = k) \leq 0.025.$$

Dabei sind  $\Gamma$  und  $\Delta$  die größte bzw. kleinste Zahl sodass die Bedingung gilt. Zuerst zeigen wir, dass beide Bedingungen zusammengefasst werden können:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{3000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3000-k} \\ &= \binom{3000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{3000} = \binom{3000}{3000-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{3000-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = P(X = 3000 - k), \end{aligned}$$

also  $\Delta = 3000 - \Gamma$ . Zusammengefasst ergeben die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\Gamma} P(X = k) + \sum_{k=3000-\Gamma}^{3000} P(X = k) &\leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \\ P(\Gamma + 1 \leq X \leq 3000 - \Gamma - 1) &\geq 0.95. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus dem Satz von de Moivre/Laplace folgt

$$P(r \leq X \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right),$$

wobei hier  $\mu = np = 1500$ ,  $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{750}$ .

Da sicher gilt  $0 \leq \Gamma \leq 1499$ , ist  $\frac{\Gamma+1-1500}{\sqrt{750}} \leq 0$ , und damit

$$\Phi\left(\frac{\Gamma - 1499}{\sqrt{750}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1499 - \Gamma}{\sqrt{750}}\right).$$

Äquivalent zu (4) ist also die Forderung (s. Tabelle)

$$\Phi\left(\frac{1499 - \Gamma}{\sqrt{750}}\right) \geq 0.975 \implies \Gamma \leq 1499 - 1.96\sqrt{750} \approx 1445.32.$$

Das heisst, wir sollten die Hypothese verwerfen falls entweder höchstens 1445 Mal oder mindestens 1555 Mal 'Kopf' geworfen wird.