Institut für Analysis und Scientific Computing
O. Koch

WS 2013/14

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Haupttest (17. Januar 2014)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

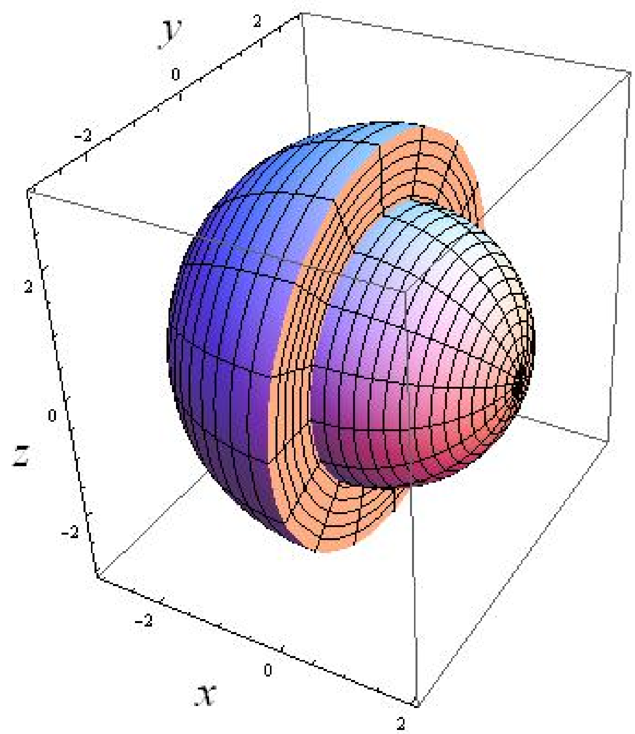
↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

— — *kein Taschenrechner;* *Unterlagen: eigenes Skriptum gestattet* — —

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1.

Eine Steh-auf-Puppe aus Holz ($\rho = 0,69\mathrm{g/cm}^3$) bestehe aus zwei Halbkugeln mit den Radien $r_1 = 2\,\mathrm{cm}$ und $r_2 = 3\,\mathrm{cm}$ (siehe Skizze).



a) Berechnen Sie die Masse des Objekts mittels Integration!

b) Wo liegt der Schwerpunkt **S** der Puppe?
Hinweis: Es gilt:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{V}\int_K \boldsymbol{r}\, dV.$$

LÖSUNG

a) Die Masse des gegebenen Objekts ergibt sich als Summe der Masse der kleineren Halbkugel (m_1) und der Masse der größeren Halbkugel (m_2),

$$m = m_1 + m_2$$

Die Masse kann mittels eines Volumsintegrals über die Halbkugel ermittelt werden. Dabei wählt man am besten gedrehte Kugelkoordinaten, bei denen die ausgezeichnete Achse mit der ausgezeichneten Achse des Systems (= der x-Achse) übereinstimmt,

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta)\cos(\phi), \\ z &= r\sin(\theta)\sin(\phi). \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante dieses Koordinatensystems ist dieselbe wie jene von Kugelkoordinaten. Daraus ergeben sich die Massen zu:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \rho \int_0^{r_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= \rho \cdot 2\pi \frac{r_1^3}{3} (-\cos(\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \rho \frac{2\pi r_1^3}{3}, \\
m_2 &= \rho \int_0^{r_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = \rho \frac{2\pi r_2^3}{3}.
\end{aligned}$$

Schließlich erhält man

$$m = \rho \frac{2\pi}{3}(r_1^3 + r_2^3) = 0,69 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 35\,\mathrm{g}.$$

Bemerkung: Wenn man die Formel für das Volumen einer Kugel kennt ($V_K = \frac{4\pi r^3}{3}$), folgt daraus direkt die Masse des Objekts:

$$m = \rho \frac{V_{K1}}{2} + \rho \frac{V_{K2}}{2} = \rho \frac{2\pi}{3}(r_1^3 + r_2^3) = 0,69 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 35\,\mathrm{g}.$$

b) Wie man aus der Skizze entnehmen kann, ist die Massenverteilung des Objekts in y- und z-Richtung völlig symmetrisch. Daraus folgt direkt:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Position des Schwerpunkts entlang der x-Achse, verwendet man am besten wieder gedrehte Kugelkoordinaten, bei denen die x-Achse ausgezeichnet ist, siehe a).
Bei der Berechnung von S_x zerfällt der Integrationsbereich in eine Integration über die kleinere Kugel K_1 und in eine Integration über die größere Kugel K_2:

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{V} \left(\int_{K_1} x\, dV + \int_{K_2} x\, dV \right) \\
&= \frac{1}{V} \left(\int_0^{r_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r\cos(\theta) r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi + \int_0^{r_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} r\cos(\theta) r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi \right) \\
&= \frac{2\pi}{V} \left(\frac{r_1^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta + \frac{r_2^4}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta \right).
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta &= \Big| u = \cos(\theta) \Big| = -\int_1^0 u\, du = \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}, \\
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta &= \Big| u = \cos(\theta) \Big| = -\int_0^{-1} u\, du = \int_{-1}^0 u\, du = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

folgt daraus

$$S_x = \frac{2\pi}{V} \left(\frac{r_1^4}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{r_2^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4V}(2^4 - 3^4)\,\mathrm{cm}^4 = -\frac{65\pi}{4V}\,\mathrm{cm}^4.$$

Das Endergebnis erhält man unter Verwendung von $V = \frac{m}{\rho}$,

$$S_x = -\frac{65\pi}{140 \cdot \frac{2\pi}{3}}\text{cm} = -\frac{39}{56}\text{cm}.$$

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(x^3 + 3yx)\,dx - 3x^2\,dy = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $a(x)$.

c) Lösen Sie obige Differentialgleichung unter Verwendung der Methoden zur Lösung exakter Differentialgleichungen und verifizieren Sie die von Ihnen gefundene Lösung $y(x)$ durch Einsetzen.

d) Berechnen Sie die spezielle Lösung, welche die Bedingung $y(3) = 0$ erfüllt.

LÖSUNG

a) Durch Vergleich mit $p(x, y) + q(x, y)y'(x) = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} p(x, y) &= x^3 + 3xy, \\ q(x, y) &= -3x^2. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ergibt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 3x, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = -6x \neq 3x.$$

Diese Differentialgleichung ist nicht exakt.

b) Man soll einen Faktor $a(x)$ bestimmen, so dass folgende Differentialgleichung exakt ist:

$$a(x)p(x, y)\,dx + a(x)q(x, y)\,dy = 0.$$

Es muss also gelten $\frac{\partial p \cdot a}{\partial y} = \frac{\partial q \cdot a}{\partial x}$:

$$\frac{\partial (pa)}{\partial y} = 3xa(x), \qquad \frac{\partial (qa)}{\partial x} = -6xa(x) + (-3x^2)a'(x).$$

Man kann nun eine Differentialgleichung erster Ordnung aufstellen, welche mittels Separation der Variablen gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} 3xa(x) &= -6xa(x) - 3x^2 a'(x) \\ -\frac{3}{x}a(x) &= a'(x) \\ \frac{da}{a} &= -\frac{3\,dx}{x} \\ \ln(a) &= -3\ln(x) \\ a(x) &= \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

c) Man löst die eben ermittelte exakte Differentialgleichung $(1 + 3\frac{y}{x^2}) - \frac{3}{x}y'(x) = 0$, indem man das Potential $\Phi(x, y)$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int \left(1 + 3\frac{y}{x^2}\right) dx + C(y) = x - \frac{3y}{x} + C(y) \\
\Phi(x,y) &= \int -\frac{3}{x}\, dy + C(x) = -\frac{3y}{x} + C(x) \\
\Longrightarrow \Phi(x,y) &= x - \frac{3y}{x}.
\end{aligned}$$

Mögliche Lösungen liegen entlang der Äquipotentiallinien:

$$x - \frac{3y}{x} = C \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x \cdot C}{3} + \frac{x^2}{3}.$$

Probe durch Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung:

$$x^3 + (-Cx + x^2)x - 3x^2\left(-\frac{C}{3} + \frac{2x}{3}\right) = 0.$$

d) Die gesuchte spezielle Lösung ergibt sich zu:

$$y(3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -C + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -x + \frac{x^2}{3}.$$

Aufgabe 3.

Ein gedämpfter linearer Oszillator bestehe aus einer punktförmigen Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$, die an einer Feder hängt, welche durch die Federkonstante $k = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ und die Dämpfungskonstante $r = 4\,\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$ charakterisiert ist. Eine auslenkende Kraft $f(t) = 32e^{-3t}\,\mathrm{N}$ wirke auf die Masse.

a) Geben Sie die Differentialgleichung an, welche dieses System beschreibt.

b) Bestimmen Sie die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und überprüfen Sie, dass diese ein Fundamentalsystem bilden.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Machen Sie für die Partikulärlösung einen Ansatz, der bezüglich seiner Struktur der Inhomogenität ähnelt.

d) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $u(0) = u_0 = 2\,\mathrm{m}$, $\dot{u}(0) = v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

LÖSUNG

a) Man erhält die Differentialgleichung, indem man ein Kräftegleichgewicht für dieses System aufstellt (siehe auch Skript Formel (5.30)),

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) &= -ku(t) - r\dot{u}(t) + f(t) \\ 2\ddot{u} &= -10u - 4\dot{u} + 32e^{-3t} \\ \ddot{u} + 2\dot{u} + 5u &= 16e^{-3t}. \end{aligned}$$

b) Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $\ddot{u} + 2\dot{u} + 5u = 0$ ergibt sich wegen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{5}\,\mathrm{s}^{-1}, \quad \rho = \frac{r}{2m} = 1\,\mathrm{s}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \rho < \omega_0,$$

zu

$$\begin{aligned} u_h(t) &= e^{-\rho t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t), \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} = 2\,\mathrm{s}^{-1} \\ \Longrightarrow \quad u_h(t) &= e^{-t}(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)). \end{aligned}$$

Die Fundamentalmatrix des Systems lautet

$$Y = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(2t) & e^{-t}\sin(2t) \\ -e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t) & -e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-t}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Damit ein Fundamentalsystem vorliegt, muss gelten $\det(Y) \neq 0\;\forall t > 0$.

$$\det(Y) = -e^{-2t}\cos(2t)\sin(2t) + 2e^{-2t}\cos(2t)^2 + e^{-2t}\cos(2t)\sin(2t) + 2e^{-2t}\sin(2t)^2 = 2e^{-2t}$$

Die Exponentialfunktion ist, unabhängig vom Argument, immer positiv. Es liegt also tatsächlich ein Fundamentalsystem vor.

c) Für die Partikulärlösung kann man folgenden Ansatz verwenden:

$$u_p(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 2\lambda Ce^{\lambda t} + 5Ce^{\lambda t} &= 16e^{-3t} \quad \Longrightarrow \lambda = -3 \\
9Ce^{-3t} - 6Ce^{-3t} + 5Ce^{-3t} &= 16e^{-3t} \\
8C &= 16 \quad \Longrightarrow C = 2.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + 2e^{-3t}.$$

d) Ermittle die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(0) = C_1 + 2 = 2 \quad \Longrightarrow C_1 = 0.$$

Unter Verwendung von

$$\dot{u}(t) = C_1(-e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t)) + C_2(-e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-t}\cos(2t)) - 6e^{-3t}$$

erhält man weiters:

$$\dot{u}(0) = 2C_2 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow C_2 = 3.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich zu:

$$u(t) = 3e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-3t}.$$