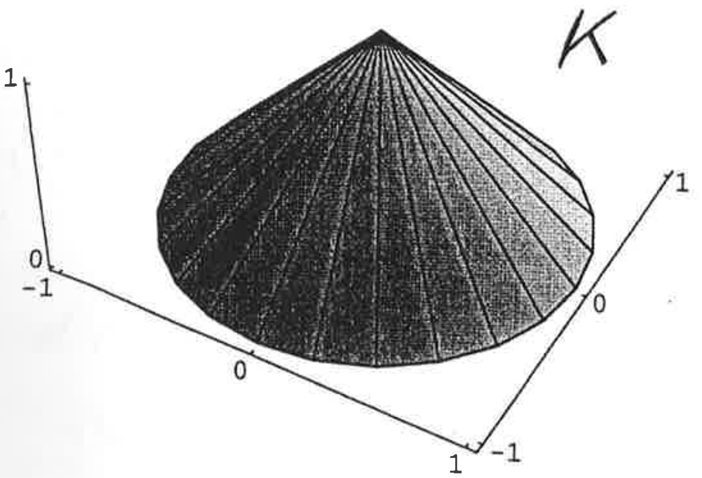
AUFGABE 4.15: EIN HOMOGENER KÖRPER WIR

DURCH DIE UNGLEICHUNGEN

$$0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq a^2 (1-z)^2$$

BESCHRIEBEN. MAN BESTIMME SEINEN SCHWERPUNKT.

LÖSUNG:



- IN ZYLINDERKOORDINATEN IST

$$K: \quad 0 \leq z \leq 1, \quad r^{\cancel{2}} \leq a^{\cancel{2}} (1-z)^{\cancel{2}}$$

--- KEGELSTUMPF (SKIZZE)

- FUNKTIONALDETERMINANTE:

$$\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right) = r$$

- **SCHWERPUNKT** (VGL. MECHANIK):

$$S = \frac{1}{M} \int_K \mathbf{r} \, dV$$

GESAMTMASSE ORTSVEKTOR $r = (x, y, z)$

- K HOMOGEN $\Rightarrow$ $S \equiv$ MASSENMITTELPUNKT

$$\boxed{S = \frac{1}{V} \int_K \mathbf{r} \, dV}$$

VOLUMEN

- **BEACHTE**:
  - •) INTEGRAL IST VEKTORWERTIG (3 SKALARE INTEGRALE FÜR X-, Y-, Z-KOMPONENTE)
  - •) V EBENFALLS ZU BESTIMMEN

- **ALSO**:

•) VOLUMEN V:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{a(1-z)} r \, dr \, dz \, d\varphi$$

FUNKT. DET.

4.15

$$\underline{V} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{a(1-z)}} \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{a^2}{2}(1-z)^2 \, dz \, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{(1-z)^3}{3}\Big|_{z=0}^{1}} \, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \, d\varphi = \frac{a^2}{6} \cdot 2\pi = \underline{\frac{a^2 \pi}{3}}$$

•) <u>VEKTORWERTIGES INTEGRAL IN S</u> :

BEACHTE : $S = (0, 0, z_S)$

WEGEN ROTATIONSSYMMETRIE

MIT

$$z_S = \frac{1}{V} \int_K z \, dV$$

Z-KOMPONENTE DES ORTSVEKTORS $\mathbf{r}$

35

ZYLINDERKOORDINATEN:

$$\int_K z\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{a(1-z)} \underbrace{z \cdot r}_{\text{FUNKT. DET.}}\, dr\, dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{a^2}{2} z (1-z)^2 \, dz\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(z^3 - 2z^2 + z \right) dz\, d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{12}$$

$$\Longrightarrow \quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \frac{a^2 \pi}{12} = \frac{3}{a^2 \pi} \cdot \frac{a^2 \pi}{12} = \frac{1}{4}$$

ALSO:

$$S = \left(0, 0, \frac{1}{4} \right)$$

$\square$