

4.17

71

AUFGABE 4.17: WIE AUFGABE 3.16 (TRÄGHEITSMOMENT BEZÜGLICH X-ACHSE) FÜR DAS DREHHYPERBOLOID

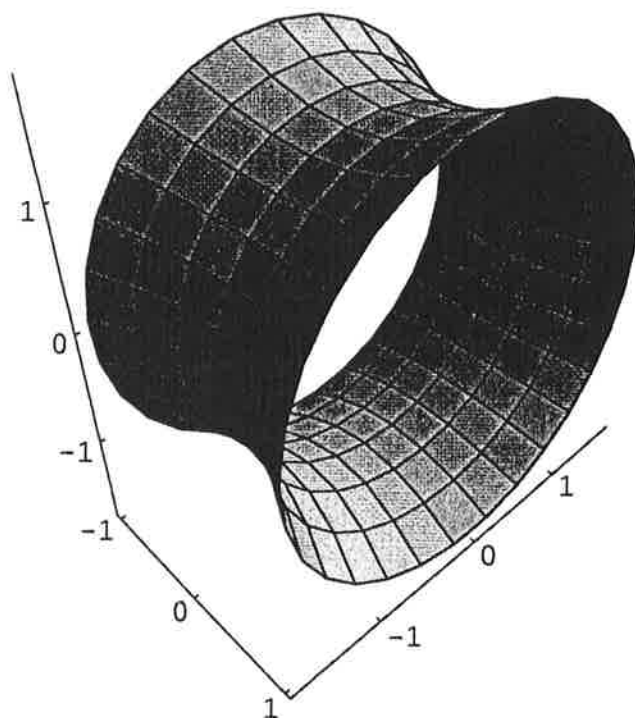
$$-1 \leq x \leq 1, \quad y^2 + z^2 \leq x^2 + 2.$$

LÖSUNG:



DREH=
HYPERBOLOID
ZWISCHEN

$$x = -1, \quad x = 1$$



- VERWENDE ZYLINDERKOORDINATEN, VARIANTE
ROTATIONSSYMMETRISCH UM X-ACHSE:

$$x = x$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cos \varphi$$

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

7

2/2

1) INTEGRAND: $y^2 + z^2 = r^2$

2) FUNKTIONALDETERMINANTE: $\det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,\varphi)} \right) = r$

3) INTEGRATIONSBEREICH: $-1 \leq x \leq 1, r^2 \leq x^2 + 2$

$$\Rightarrow \int_K \rho(y^2 + z^2) dV =$$

$$= \rho \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{x^2+2}} r^2 \cdot r dr d\varphi dx$$

$$= 2\pi \rho \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{\sqrt{x^2+2}}}_{\frac{1}{4}(x^2+2)^2} dx$$

$$= 2\pi \rho \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (x^2+2)^2 dx$$

$$= \frac{\rho \pi}{2} \int_{-1}^1 (x^4 + 4x^2 + 4) dx$$

$$= \frac{\rho \pi}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) = \frac{83 \rho \pi}{15}$$