Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger

WS 2014/2015

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

1. Test am 12. Dezember 2014

Gruppe 1 *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Studium / MatrNr**

Die Verwendung eines ein-, zweizeiligen (nicht programmierbaren, nicht grafikfähigen) Taschenrechners und des eigenen Skriptums sind erlaubt.

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $A = (2,2,1)$, $B = (6,2,1)$ und $C = (6,5,1)$ im $\mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A , B und C rechtwinkelig ist.

2. Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks ABC mit zwei verschiedenen Methoden.

3. Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die die Punkte A, B und C enthält.

4. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit Hilfe eines Kurvenintegrals.
   Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung.

5. Betrachten Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x, 2y, 3z) = \nabla\Phi$ mit $\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + y^2 + 3\frac{z^2}{2}$.
   Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Kurve, die durch den Umfang des Dreiecks ABC gegeben ist, also entlang $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$.

LÖSUNG

1. $\overrightarrow{AB} = (4,0,0), \overrightarrow{BC} = (0,3,0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$
   Das Dreieck mit den Eckpunkten ABC ist rechtwinkelig mit $\beta = \frac{\pi}{2}$.

2. Es gilt $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = 4$ und $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} = 3$. Also ist die Fläche des gegebenen rechtwinkeligen Dreiecks $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2} = 6$.
   Weiters kann diese Fläche mit Hilfe des halben Betrags des Normalvektors ausgerechnet werden: $\boldsymbol{n} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{BC}| = (0,0,12) \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{|\boldsymbol{n}|}{2} = 6$.

3. Die Gleichung der Ebene in Normalvektorform mit $\boldsymbol{n} = (0,0,12)$ und Einsetzen des Punktes A , B oder C ist $12z = 12$.

4. Für die Kurve C brauchen wir drei Parametrisierungen: $\boldsymbol{r}_1(t) = A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0,1], \boldsymbol{r}_2(t) = B + t\overrightarrow{BC}, t \in [0,1]$ und $\boldsymbol{r}_3(t) = C + t\overrightarrow{CA}, t \in [0,1]$. Daraus ergibt sich für den Umfang

$$\begin{aligned} U = & \int_C |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_0^1 |\boldsymbol{r}_1'(t)|\, dt + \int_0^1 |\boldsymbol{r}_2'(t)|\, dt + \int_0^1 |\boldsymbol{r}_3'(t)|\, dt \\ = & \int_0^1 |\overrightarrow{AB}|\, dt + \int_0^1 |\overrightarrow{BC}|\, dt + \int_0^1 |\overrightarrow{CA}|\, dt = 4 + 3 + 5 = 12\,. \end{aligned}$$

5. Das gegebene Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ ist ein Gradientenfeld! Daher ergibt das Kurvenintegral über die geschlossene Kurve entlang des Umfangs des Dreiecks ABC Null.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Helge und Luan sind ein Pärchen und üben eine Kraft aufeinander aus, die als Gradientenfeld darstellbar ist. Wenn sich Luan im Ursprung des Koordinatensystems aufhält, wirkt auf Helge die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$ mit

$$V(\boldsymbol{r}) = V(x, y, z) = 300e^{e^x} + 200z^2x + 100y + 99\pi\,.$$

1. Berechnen Sie die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

2. Berechnen Sie die Richtungsableitung von V in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = (0, -3, 4)$ an der Stelle $(1, 1, 1)$.

3. Helge bewegt sich nun entlang der Kurve C mit der Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(t)\cos(t) \\ 2t^{3/2} \\ -1 + \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \pi\,.$$

   Berechnen Sie die Arbeit $W = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, die Helge gegen die Kraft verrichtet.

4. Berechnen Sie die Länge des Weges, den Helge zurücklegt über die Bogenlänge der Kurve C.

   Verwenden Sie dabei die Identitäten $\sin(2t) = 2\sin(t)\,\cos(t)$ und $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)\,.$

LÖSUNG

1. Berechnung des Gradienten über die partiellen Ableitungen:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial V}{\partial y}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial V}{\partial z}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 300\, e^{e^x}\, e^x + 200z^2 \\ 100 \\ 400zx \end{pmatrix}$$

2. Die Richtungsableitung ist das Skalarprodukt aus Gradient $\nabla V(\boldsymbol{r})$ und Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{a}}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{5}(0, -3, 4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{a}}}(1,1,1) = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla V(1,1,1) = -\hat{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{F}(1,1,1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix} = \frac{-300 + 1600}{5} = 260$$

3. Da es sich um ein Gradientenfeld handelt, hängt das Kurvenintegral nur von Anfangspunkt und Endpunkt ab:

$$W = +\int_C \nabla V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}(\pi)) - V(\boldsymbol{r}(0))$$

$$\boldsymbol{r}(\pi) = (0, 2\pi^{3/2}, 0), \qquad \boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$$

   Einsetzen:

$$W = 300e^1 + 100 \cdot 2\pi^{3/2} + 99\pi - 300e^1 - 99\pi = 200\,\pi^{3/2}$$

4. Die Parameterdarstellung kann mit Hilfe der angegebenen Identitäten vereinfacht werden

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t\cos t \\ 2t^{3/2} \\ -1+\cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2t^{3/2} \\ \cos(2t)-1 \end{pmatrix}.$$

Die Bogenlänge ist das Integral $s = \int_C |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \int_0^\pi |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 3\sqrt{t} \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{4\cos^2(2t) + 9t + 4\sin^2(2t)} = \sqrt{4+9t}\,.$$

Damit ergibt sich für den zurückgelegten Weg:

$$s = \int_0^\pi \sqrt{4+9t}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = 4+9t \\ \mathrm{d}u = 9\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\int_4^{4+9\pi} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\,u^{3/2}\Big|_4^{4+9\pi} = \frac{2}{27}\left((4+9\pi)^{3/2} - 8\right)$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

1. Gegeben ist der Bereich $K = \left\{(r,\varphi,\theta)\,|\, 0 \le r \le 1,\, 0 \le \varphi < 2\pi,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ in Kugelkoordinaten. K ist die über der xy-Ebene liegende Halbkugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius 1 . Berechnen Sie
$$\iiint\limits_K z^4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV.$$

2. Betrachten Sie das Parameterintegral
$$G(x) = \int\limits_0^x \ln(2+x+y)\,dy, \quad x > 0.$$
Berechnen Sie die Ableitung $G'(x)$ auf zwei Arten (zuerst Integrieren, dann Differenzieren bzw. umgekehrt).

Hinweis:

- $\int \ln u\,du = \int 1\cdot \ln u\,du$
- $\int \cos^n u \sin u\,du$ geeignet substituieren!

LÖSUNG

1. Mit den aus der Vorlesung bekannten Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ und unter Beachtung der Funktionaldeterminante $r^2\sin\theta$ beim Übergang von kartesischen auf Kugelkoordinaten folgt:
$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_K z^4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV\\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 (r\cos\theta)^4 \underbrace{\sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta}}_{=r\sqrt{sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta}=r\sqrt{sin^2\theta+cos^2\theta}}\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 r^7\cos^4\theta\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^8}{8}\cos^4\theta\sin\theta\Big|_{r=0}^1\,d\theta\,d\varphi\\
&\overset{u=\cos\theta}{=} -\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^0 u^4\,du\,d\varphi = -\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u^5}{5}\Big|_{u=1}^0\,d\varphi = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}
\end{aligned}$$

2. Integriert man zuerst unter Verwendung der Identität $\int \ln u\,du = u(\ln u - 1)$ erhält man:
$$\begin{aligned}
G(x) &= \int\limits_0^x \ln(2+x+y)\,dy\\
&= (2+x+y)(\ln(2+x+y)-1)\Big|_0^x\\
&= (2+2x)(\ln(2+2x)-1) - (2+x)(\ln(2+x)-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow G'(x) &= 2(\ln(2+2x)-1) + (2+2x)\frac{2}{2+2x} - (\ln(2+x)-1) - (2+x)\frac{1}{2+x} \\ &= 2\ln(2+2x) - 2 + 2 - \ln(2+x) + 1 - 1 \\ &= 2\ln(2+2x) - \ln(2+x)\end{aligned}$$

Differenziert man zuerst unter Verwendung der Ableitungsformel für Parameterintegrale, erhält man:

$$\begin{aligned}G'(x) &= \int\limits_0^x \frac{1}{2+x+y}\,d\,y + \ln(2+2x) \\ &= \ln(2+x+y)\Big|_0^x + \ln(2+2x) \\ &= 2\ln(2+2x) - \ln(2+x)\end{aligned}$$