

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 16. Jänner 2015

Gruppe 1 (mit Lösung)

↑ FAMILIENNAME	↑ Vorname	↑ Matrikelnummer

Die Verwendung eines ein-, zweizeiligen (nicht programmierbaren, nicht grafikfähigen) Taschenrechners ist erlaubt, die Verwendung des Skriptums ist nicht gestattet.

(1)	(2)	(3)
Σ (max. 30)		

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Ein zweidimensionaler homogener Krapfen K enthält eine Füllung F aus inhomogener Marillenmarmelade mit reduziertem Zuckergehalt. Die Fläche K besteht aus allen Punkten (x, y) , die

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1 \quad (1)$$

erfüllen und hat die Dichte $\rho_K = 1$. Die Füllung F besteht aus allen Punkten (x, y) , die

$$\frac{x^2}{4} + y^2 < 1 \quad (2)$$

erfüllen und hat die Dichte $\rho_F(x, y) = 2 - y$. Ziel ist die Bestimmung des gemeinsamen Massenmittelpunkts von K und F . Gehen Sie dazu schrittweise vor:

- a) Zur Berechnung der Integrale ist eine Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (r, \phi)$ der Form

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \phi \\ y &= br \sin \phi \end{aligned}$$

nützlich. Überlegen Sie, wie a und b zu wählen sind, damit die Ungleichungen (1) und (2) nach der Transformation eine besonders einfache Gestalt annehmen und geben Sie die Ungleichungen für die Grenzen von K und F in den neuen Variablen (r, ϕ) an¹.

- b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation $(x, y) \mapsto (r, \phi)$.
c) Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho_K dA + \int_F \rho_F(x, y) dA$ des gesamten Krapfens ($K \cup F$).
d) Der Massenmittelpunkt \mathbf{S} des gesamten Krapfens $K \cup F$ ist definiert durch die Formel

$$\mathbf{S} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \int_K x \rho_K dA + \int_F x \rho_F(x, y) dA \\ \int_K y \rho_K dA + \int_F y \rho_F(x, y) dA \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie \mathbf{S} unter der Verwendung der obigen Transformation. Stellen Sie Symmetrieüberlegungen an, um die Rechnung zu vereinfachen!

LÖSUNG

- a) Einsetzen der Koordinatentransformation in Gleichung (1) ergibt:

$$\frac{a^2}{4} r^2 \cos^2 \phi + b^2 r^2 \sin^2 \phi \leq 4$$

Dies legt die Wahl $a = 2$, $b = 1$ nahe. Damit transformieren die Gleichungen (1) und (2) zu

$$r^2 \leq 4, \quad r^2 \geq 1 \quad \text{und} \quad r^2 < 1.$$

¹Wie bei herkömmlichen Polarkoordinaten verlangen wir, dass r positiv ist und ϕ im Intervall $[0, 2\pi]$ bleibt. Zu bestimmen sind die zusätzlichen Einschränkungen, die sich durch die Integrationsbereiche K und F ergeben.

b) Für die Jacobi-Matrix erhalten wir

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi & -2r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} \right) = 2r.$$

c) In den neuen Koordinaten erhalten wir $\rho_F(r, \phi) = 2 - r \sin \phi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= \int_{r=1}^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r \cdot 1 \, d\phi \, dr + \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r \cdot (2 - r \sin \phi) \, d\phi \, dr \\ &= 4\pi \int_1^2 r \, dr + 8\pi \int_0^1 r \, dr - 2 \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \phi \, d\phi \, dr \\ &= 2\pi r^2 \Big|_1^2 + 4\pi r^2 \Big|_0^1 - 0 = 6\pi + 4\pi = 10\pi. \end{aligned}$$

d) Zur Integration über K : x ist ungerade in sich selbst und die Dichte ist eine Konstante. Weiters ist der Integrationsbereich symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y -Achse. Daher ist der Beitrag des Integrals über K zu S_x gleich 0. Analog dazu ist auch der Beitrag des Integrals über K zu S_y gleich 0.

Auch F ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y -Achse und ρ_F hängt nicht von x ab. Daher ergibt sich auch für den Beitrag von F zu S_x ein Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall, und $S_x = 0$.

Daher muss nur eines der vier Integrale tatsächlich durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int_F y \rho_F(x, y) \, dA &= \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r \cdot r \sin \phi \cdot (2 - r \sin \phi) \, d\phi \, dr \\ &= 4 \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin \phi \, d\phi \, dr - 2 \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} r^3 \sin^2 \phi \, d\phi \, dr \\ &= 0 - \frac{2}{4} r^4 \Big|_0^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = -\frac{1}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi &= -\cos \phi \sin \phi \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi = 0 + \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi - \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi \\ \Rightarrow 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \pi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_F y \rho_F(x, y) \, dA = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

2.1) Finden Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^3 (\sin y) y'(x) = 2$$

mittels Separation der Variablen.

2.2) Welche Bedingung muss gelten, damit eine Differentialgleichung der Form

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

exakt ist?

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$2xy dx - (x^2 + y) dy = 0$$

nicht exakt ist. Finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $a(x, y) = \mu(y)$, der die Gleichung exakt macht. Bestimmen Sie dann eine Stammfunktion und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(0) = 1$.

Hinweis: Die Lösungen der Differentialgleichung sind Niveaulinien der Stammfunktion, es reicht eine implizite Darstellung der Lösung.

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned} x^3 \sin y y'(x) &= 2 \\ \sin y dy &= \frac{2}{x^3} dx \\ -\cos y &= -\frac{1}{x^2} + c \\ y(x) &= \cos^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - c \right) = \arccos \left(\frac{1}{x^2} - c \right) \end{aligned}$$

b) Eine Differentialgleichung der Form $p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$ ist exakt, falls die Integrabilitätsbedingung $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ erfüllt ist.

Die Differentialgleichung $2xy dx - (x^2 + y) dy = 0$ ist nicht exakt da

$$\frac{dp}{dy} = 2x \neq -2x = \frac{dq}{dx}.$$

Mit integrierendem Faktor $\mu(y)$ ergibt die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} 2x \mu(y) + 2xy \mu'(y) &= -2x \mu(y) \\ 2xy \mu'(y) &= -4x \mu(y) \\ \frac{1}{\mu} d\mu &= -\frac{2}{y} dy \\ \ln(\mu) &= -2 \ln(y) + c \\ \mu(y) &= \tilde{c} y^{-2}. \end{aligned}$$

$\frac{2x}{y} dx - \frac{1}{y^2}(y + x^2) dy = 0$ ist exakt. Wir suchen die Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{y} dx &= \frac{x^2}{y} + c_1(y) \\ - \int \frac{1}{y^2}(y + x^2) dy &= -\ln(y) + \frac{x^2}{y} + c_2(x) \\ \Phi(x, y) &= -\ln(y) + \frac{x^2}{y}\end{aligned}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind Niveaulinien der Stammfunktion, also $\Phi(x, y) = c$. Zum Anfangswertproblem $y(0) = 1$ erhalten wir $c = 0$ und daher

$$-\ln(y) + \frac{x^2}{y} = 0.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

3.1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y' = xy - x$.

3.2) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Weisen Sie nach, dass Ihre Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sind.

Finden Sie die Konstanten C_1, C_2 , sodass die Lösung $y(x)$ die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllen.

LÖSUNG

3.1) Das ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten. Für die Lösung gilt $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Es handelt sich aber auch um eine separable Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y' &= x(y - 1) \\ \frac{dy}{y - 1} &= x \, dx \\ \int \frac{1}{y - 1} \, dy &= \int x \, dx \\ \ln(y - 1) &= \frac{x^2}{2} + \tilde{c} \\ y - 1 &= c \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ y &= c \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + 1 \end{aligned}$$

3.2) Das ist eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als Ansatz für die Lösung wählen wir $y(x) = e^{\lambda x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0.$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

zu lösen. Mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -4$ sind die beiden Lösungen $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^{-4x}$ und daraus folgt $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Weisen wir nach, dass die Lösungen y_1, y_2 linear unabhängig sind. Wir berechnen die Wronski-Determinante

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det Y = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-4x} \\ 2e^{2x} & -4e^{-4x} \end{pmatrix} = -6e^{-2x} \neq 0$$

Einsetzen der gegebenen Anfangswerte:

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$y'(0) = 1 = 2c_1 - 4c_2 \Rightarrow 6c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = -\frac{1}{6}$$

