Institut für Analysis und Scientific Computing
G. Schranz-Kirlinger

WS 2014/2015

PRAKTISCHE MATHEMATIK I FÜR TPH

2. Test am 16. Jänner 2015)

Gruppe 2 *(mit Lösung)*

↑ **FAMILIENNAME**	↑ **Vorname**	↑ **Matrikelnummer**

Die Verwendung eines ein-, zweizeiligen (nicht programmierbaren, nicht grafikfähigen) Taschenrechners ist erlaubt, die Verwendung des Skriptums ist nicht *gestattet.*

(1)	(2)	(3)
$\sum$ *(max. 30)*		

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Ein zweidimensionaler homogener Krapfen K enthält eine Füllung E aus inhomogener Erdbeermarmelade aus kontrolliert biologischem Anbau. Die Fläche K besteht aus allen Punkten (x, y), die

$$\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 4 \qquad \text{und} \qquad \frac{x^2}{9} + y^2 \geq 1 \tag{1}$$

erfüllen und hat die Dichte $\rho_K = 1$. Die Füllung E besteht aus allen Punkten (x, y), die

$$\frac{x^2}{9} + y^2 < 1 \tag{2}$$

erfüllen und hat die Dichte $\rho_E(x, y) = 3 + x$. Ziel ist die Bestimmung des gemeinsamen Massenmittelpunkts von K und E. Gehen Sie dazu schrittweise vor:

a) Zur Berechnung der Integrale ist eine Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (r, \phi)$ der Form

$$x = ar\cos\phi$$
$$y = br\sin\phi$$

nützlich. Überlegen Sie, wie a und b zu wählen sind, damit die Ungleichungen (1) und (2) nach der Transformation eine besonders einfache Gestalt annehmen und geben Sie die Ungleichungen für die Grenzen von K und E in den neuen Variablen (r, ϕ) an[1].

b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation $(x, y) \mapsto (r, \phi)$.

c) Berechnen Sie die Masse $M = \int_K \rho_K \, dA + \int_E \rho_E(x, y) \, dA$ des gesamten Krapfens $(K \cup E)$.

d) Der Massenmittelpunkt $\boldsymbol{S}$ des gesamten Krapfens $K \cup E$ ist definiert durch die Formel

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \int_K x\rho_K \, dA + \int_E x\rho_E(x, y) \, dA \\ \int_K y\rho_K \, dA + \int_E y\rho_E(x, y) \, dA \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{S}$ unter der Verwendung der obigen Transformation. Stellen Sie Symmetrieüberlegungen an, um die Rechnung zu vereinfachen!

LÖSUNG

a) Einsetzen der Koordinatentransformation in Gleichung (1) ergibt:

$$\frac{a^2}{9} r^2 \cos^2\phi + b^2 r^2 \sin^2\phi \leq 4$$

Dies legt die Wahl $a = 3$, $b = 1$ nahe. Damit transformieren die Gleichungen (1) und (2) zu

$$r^2 \leq 4, \qquad r^2 \geq 1 \quad \text{und} \quad r^2 < 1.$$

[1] Wie bei herkömmlichen Polarkoordinaten verlangen wir, dass r positiv ist und ϕ im Intervall $[0, 2\pi]$ bleibt. Zu bestimmen sind die zusätzlichen Einschränkungen, die sich durch die Integrationsbereiche K und E ergeben.

b) Für die Jacobi-Matrix erhalten wir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{pmatrix} 3\cos\phi & -3r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right) = 3r.$$

c) In den neuen Koordinaten erhalten wir $\rho_E(r,\phi) = 3 + 3r\cos\phi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= \int_{r=1}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} 3r\cdot 1\, d\phi\; dr + \int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 3r\cdot(3+3r\cos\phi)\; d\phi\, dr \\ &= 6\pi\int_1^2 r\,dr + 18\pi\int_0^1 r\,dr + 9\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\cos\phi\,d\phi\,dr \\ &= 3\pi r^2\Big|_1^2 + 9\pi r^2\Big|_0^1 - 0 = 9\pi + 9\pi = 18\pi. \end{aligned}$$

d) Zur Integration über K: x ist ungerade in sich selbst und die Dichte ist eine Konstante. Weiters ist der Integrationsbereich symmetrisch bezüglich Spiegelung an der y-Achse. Daher ist der Beitrag des Integrals über K zu S_x gleich 0. Analog dazu ist auch der Beitrag des Integrals über K zu S_y gleich 0.

Auch E ist symmetrisch bezüglich Spiegelung an der x-Achse und ρ_E hängt nicht von y ab. Daher ergibt sich auch für den Beitrag von E zu S_y ein Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall, und $S_y = 0$.

Daher muss nur eines der vier Integrale tatsächlich durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int_E x\rho_E(x,y)\,dA &= \int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 3r\cdot 3r\cos\phi\cdot(3+3r\cos\phi)\,d\phi\,dr \\ &= 27\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\cos\phi\,d\phi\,dr + 27\int_{r=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^3\cos^2\phi\,d\phi\,dr \\ &= 0 + \frac{27}{4}r^4\Big|_0^1\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi = \frac{27}{4}\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi = \sin\phi\cos\phi\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,d\phi = 0 + \int_0^{2\pi} 1\,d\phi - \int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi \\ \Rightarrow\ &2\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi = \int_0^{2\pi} 1\,d\phi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi = \pi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_E x\rho_E(x,y)\,dA = \frac{27\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

2.1) Finden Sie eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^2\,(\cos y)\,y'(x) = -1$$

mittels Separation der Variablen.

2.2) Welche Bedingung muss gelten damit eine Differentialgleichung der Form

$$p(x,y)\;dx + q(x,y)\;dy = 0$$

exakt ist?
Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(1 - x^2 y)\;dx + x^2(y-x)\;dy = 0$$

nicht exakt ist. Finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $a(x,y) = \mu(x)$, der die Gleichung exakt macht. Bestimmen Sie dann eine Stammfunktion und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(1) = 0$.
Hinweis: Lösungen der Differentialgleichung sind Niveaulinien der Stammfunktion, es reicht eine implizite Darstellung der Lösung.

LÖSUNG

a)

$$\begin{aligned}
x^2\;\cos y\;y'(x) &= -1\\
\cos y\;dy &= -\frac{1}{x^2}dx\\
\sin y &= \frac{1}{x} + c\\
y(x) &= \sin^{-1}\left(\frac{1}{x} + c\right) = \arcsin\left(\frac{1}{x} + c\right)
\end{aligned}$$

b) Eine Differentialgleichung der Form $p(x,y)\;dx + q(x,y)\;dy = 0$ ist exakt, falls die Integrabilitätsbedingung $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ erfüllt ist.
Die Differentialgleichung $(1 - x^2 y)\;dx + x^2(y-x)\;dy = 0$ ist nicht exakt da

$$\frac{dp}{dy} = -x^2 \neq 2xy - 3x^2 = \frac{dq}{dx}\;.$$

Mit integrierendem Faktor $\mu(x)$ ergibt die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}
-x^2\mu(x) &= (2xy - 3x^2)\;\mu(x) + x^2(y-x)\;\mu'(x)\\
(2x^2 - 2xy)\;\mu(x) &= x^2(y-x)\;\mu'(x)\\
\frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)}\;\mu(x) &= \mu'(x)\\
-\frac{2}{x}\;dx &= \frac{1}{\mu}\;d\mu\\
-2\ln(x) &= \ln(\mu) + c\\
\tilde{c}x^{-2} &= \mu(x)\;.
\end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)\, dx + (y - x)\, dy = 0$ ist exakt. Wir suchen die Stammfunktion:

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - y\right)\, dx = -\frac{1}{x} - xy + c_1(y)$$
$$\int (y - x)\, dy = \frac{y^2}{2} - xy + c_2(x)$$
$$\Phi(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy$$

Lösungen der Differentialgleichung sind Niveaulinien der Stammfunktion, also $\Phi(x, y) = c$. Zum Anfangswertproblem $y(1) = 0$ erhalten wir $c = 0$ und daher

$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + 1 = 0\,.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

3.1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $\quad y' = 2xy + x\,.$

3.2) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 0\,.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Weisen Sie nach, dass Ihre Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sind.
Finden Sie die Konstanten C_1, C_2 , sodass die Lösung $y(x)$ die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ erfüllen.

LÖSUNG

3.1) Das ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten. Für die Lösung gilt $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Es handelt sich aber auch um eine separable Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
y' &= x(2y+1) \\
\frac{dy}{2y+1} &= x\,dx \\
\int \frac{1}{2y+1}\,dy &= \int x\,dx \\
\frac{1}{2}\ln(2y+1) &= \frac{x^2}{2} + \tilde{c} \\
\ln(2y+1) &= x^2 + \tilde{\tilde{c}} \\
2y+1 &= \tilde{\tilde{\tilde{c}}}\, e^{x^2} \\
y &= c\, e^{x^2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3.2) Das ist eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als Ansatz für die Lösung wählen wir $y(x) = e^{\lambda x}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0\,.$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

zu lösen. Mit $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ sind die beiden Lösungen $y_1(x) = e^{3x}$ und $y_2(x) = e^{-x}$ und daraus folgt $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Weisen wir nach, dass die Lösungen y_1, y_2 linear unabhängig sind. Wir berechnen die Wronski-Determnante

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det \mathrm{Y} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 3e^{3x} & -e^{-x} \end{pmatrix} = -4e^{-2x} \neq 0$$

Einsetzen der gegebenen Anfangswerte:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ y'(0) &= 1 = 3c_1 - c_2 \Rightarrow 4c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$