Institut für Analysis und Scientific Computing
C. Heitzinger

TU Wien
WS 2015

PRAKTISCHE MATHEMATIK FÜR TPH (103.089)

2. Haupttest (Fr., 15.01.2016) *(mit Lösung)*

— *Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 30*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Die Differentialgleichung für ein gedämpftes Federpendel lautet

$$\ddot{\varphi}(t) + 4\dot{\varphi}(t) + 3\varphi(t) = S(t) \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi}(t) := \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Die Störung $S(t)$ ist gegeben durch

$$S(t) = 2 + 3t.$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Für eine allgemeine Lösung definieren wir uns zuerst:

$$\omega_0^2 := 3, \quad 2\delta := 4$$

Damit ergibt sich folgende homogene DGL:

$$\ddot{\varphi}_h(t) + 2\delta\dot{\varphi}_h(t) + \omega_0^2\varphi_h(t) = 0$$

Zur Lösung wählen wir den Ansatz:

$$\varphi_h(t) = Ce^{\lambda t}$$

Diesen setzten wir in die homogene DGL ein und erhalten:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Dadurch ergibt sich die homogene Lösung:

$$\varphi_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t}\right)$$

$$\varphi_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t}$$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.
Hinweis: Ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung ist $\varphi_p(t) = a_0 + a_1 t$.

Für eine allgemeine Lösung definieren wir uns zuerst:

$$S(t) = A_0 + A_1 t \quad mit \quad A_0 = 2, A_1 = 3$$

Damit ergibt sich folgende inhomogene DGL:

$$\ddot{\varphi}_p(t) + 2\delta\dot{\varphi}_p(t) + \omega_0^2\varphi_p(t) = A_0 + A_1 t$$

(Kästchen für b) geht auf der nächsten Seite weiter.)

zu b)

Wir wählen den Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$\varphi_p(t) = a_0 + a_1 t$$

Diesen Ansatz setzen wir in die inhomogene DGL ein und erhalten:

$$2\delta a_1 + \omega_0^2(a_0 + a_1 t) = A_0 + A_1 t$$

$$(2\delta a_1 + \omega_0^2 a_0) + \omega_0^2 a_1 t = A_0 + A_1 t$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$a_1 = \frac{A_1}{\omega_0^2} \quad a_0 = \frac{A_0 - 2\delta a_1}{\omega_0^2}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$a_1 = 1, \quad a_0 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi_p(t) = a_0 + a_1 t = -\frac{2}{3} + t$$

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an.

Die Lösung ergibt sich aus Kombination von homogener und partikulärer Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} - \frac{2}{3} + t$$

Aufgabe 2.

Es sei folgendes Anfangswertproblem gegeben:

$$2x\ln(y)\mathrm{d}x + \frac{x^2+1}{y}\mathrm{d}y = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{e}.$$

a) Falls die Differentialgleichung exakt ist, muss die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein. Überprüfen Sie sie.

Für eine Differentialgleichung der Form $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$ lautet die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial y}p(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}q(x,y)$$

$$p(x,y) := 2x\ln(y), \quad q(x,y) := (x^2+1)\frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}p(x,y) = \frac{2x}{y} = \frac{\partial}{\partial x}q(x,y)$$

b) Bestimmen Sie eine zur Differentialgleichung gehörende Stammfunktion $\Phi(x,y)$.

Wir wollen die zugehörige Stammfunktion $\phi(x,y)$ bestimmen.

$$2x\ln(y) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{1}{y}\right)y' = 0$$

Durch Integration erhält man:

$$\int \mu(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x = \int 2x\ln(y)\mathrm{d}x = x^2\ln(y) + C(y)$$
$$\int \mu(x,y)q(x,y)\mathrm{d}y = \int \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = (x^2+1)\ln(y) + D(x)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen erhält man

$$\phi(x,y) = (x^2+1)\ln(y) + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

c) $\Phi(x,y) = C \in \mathbb{R}$ ist eine implizite Gleichung für die Lösung. Geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an sowie die Lösung für die gegebene Anfangsbedingung $y(0) = 1/e$.

Nach Konstruktion erfüllt die Stammfunktion die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y(x)) = 2x\ln(y) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{1}{y}\right)y' = 0$$

und ist daher entlang von x konstant. Es folgt daher für $d \in \mathbb{R}$

$$\phi(x,y(x)) = const. \Rightarrow (x^2+1)\ln(y) = d$$

Durch Umformen erhält man $\ln(y) = \frac{d}{x^2+1}$, wodurch für $y = e^{\frac{d}{x^2+1}}$ folgt. Nun lässt sich d durch Vergleich mit der Anfangsbedingung bestimmen.

$$y(0) = e^d = \frac{1}{e} = e^{-1} \Rightarrow d = -1$$
$$y(x) = e^{-\frac{1}{x^2+1}}.$$

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'(x) = xy(x) - x$$

mittels Separation der Variablen.

$$\begin{aligned}
y' &= x(y-1) \\
\frac{dy}{y-1} &= x\,dx \\
\int \frac{1}{y-1}\,dy &= \int x\,dx \\
\ln(y-1) &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\
y-1 &= c_2 \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
y &= c_2 \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + 1
\end{aligned}$$

b) Geben Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ an.

$y(0) = c_2 + 1 = 2$, daher $c_2 = 1$.