Methode der unbestimmten Koeffizienten

Clemens Heitzinger

Die folgenden Schritte fassen die Lösung eines Anfangswertproblems der inhomogenen Form

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten zusammen. Diese Vorgehensweise führt auch bei Gleichungen anderer als zweiter Ordnung zur Lösung.

1. Bestimme die allgemeine Lösung $y_h(t)$ der homogenen Gleichung

   $$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

   Die allgemeine Lösung enthält Konstanten C_k.

2. Falls die Inhomogenität $g(t)$ eine Form in Tabelle 1 hat, kann die Methode der unbestimmen Koeffizienten verwenden werden. Ansonsten ist die Methode der Variation der Konstanten zu verwenden.

3. Wenn $g(t) = g_1(t) + \cdots + g_n(t)$, das heißt, wenn $g(t)$ eine Summe von n Termen ist, dann bilde n Teilprobleme. Die Teilprobleme sind

   $$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g_i(t)$$

   für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Für das $i$te Teilproblem finde einen geeigneten Ansatz $y_{p,i}(t)$ laut Tabelle 1. Falls irgendein Term im Ansatz $y_{p,i}(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung (die im ersten Schritt gefunden wurde) dupliziert, dann multipliziere den Ansatz $y_{p,i}(t)$ mit t oder t^2 oder t^3 usw. bis der Ansatz keine Lösung mehr dupliziert.

   (Eine Lösung der homogenen Lösung ergibt immer eine rechte Seite 0, sodass solch ein Ansatz für eine Inhomogenität $g_i(t) \neq 0$ nicht funktionieren kann.)

5. Finde eine partikuläre Lösung $y_{p,i}(t)$ jedes Teilproblems durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Dann ist die Summe

   $$y_p(t) := y_{p,1}(t) + \cdots + y_{p,n}(t)$$

   eine partikuläre Lösung der ursprünglichen inhomogenen Gleichung.

6. Summiere die allgemeine Lösung $y_h(t)$ der homogenen Gleichung und die partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung um die allgemeine Lösung
$$y(t) := y_h(t) + y_p(t)$$
der inhomogenen Gleichung zu finden.

7. Verwende die Anfangsbedingungen um die Werte der Konstanten C_k in der allgemeinen Lösung zu finden.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten korrigiert sich selbst in dem Sinn, dass der Koeffizientenvergleich zur Bestimmung der A_j und B_j zu einem Widerspruch führt, wenn der Ansatz für die partikuläre Lösung $y_{p,i}$ fälschlich zu einfach gewählt wurde. Dann ist der Ansatz mit t oder t^2 usw. zu multiplizieren (vgl. mit den Faktoren t^s in der Tabelle). Andererseits können einige Koeffizienten als 0 gewählt werden, wenn der Ansatz fälschlich zu kompliziert gewählt wurde. Dann wird zwar unnötige Rechenarbeit verrichtet, aber die richtige Lösung gefunden.

Inhomogenität $g(t)$	Partikuläre Lösung $y_{p,i}(t)$
$P_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$	$t^s(A_n t^n + \cdots + A_0)$
$P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$	$t^s(A_n t^n + \cdots + A_0)\mathrm{e}^{\alpha t}$
$P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$t^s\big((A_n t^n + \cdots + A_0)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + (B_n t^n + \cdots + B_0)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\big)$
$P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$t^s\big((A_n t^n + \cdots + A_0)\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + (B_n t^n + \cdots + B_0)\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\big)$

Tabelle 1: Ansätze für partikuläre Lösungen für verschiedene Inhomogenitäten. $s \in \mathbb{N}_0$ ist die kleinste nichtnegative natürliche Zahl, die sicherstellt, dass kein Term in $y_{p,i}(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. In der ersten Zeile ist s die Vielfachheit von 0 als Lösung der charakteristischen Gleichung; in der zweiten Zeile ist α eine Lösung der charakteristischen Gleichung; und in der dritten und vierten Zeile ist $\alpha + \mathrm{i}\beta$ Lösung der charakteristischen Gleichung.