Institut für Analysis und Scientific Computing
C. Heitzinger

TU Wien
WS 2016

PRAKTISCHE MATHEMATIK FÜR TPH (103.089)

1. Haupttest (Fr., 16.12.2016) *(mit Lösung)*

— *Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 30*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Champions League Finale 2016 in Mailand. Cristiano Ronaldo tritt zum entscheidenden Strafstoß an und verwandelt sicher für Real Madrid. Sein Anlauf zum Punkt verläuft entlang der Kurve $\mathbf{r}(t)$ mit $0 \leq t \leq 3$.
Seine Geschwindigkeit während des Anlaufes $\mathbf{v}(t)$ und seine Position zum Zeitpunkt $t = 2$ sind bekannt:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ entlang derer Ronaldo anläuft mittels $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{r}(2)$!

Hinweis: Integration mit Hilfe von Substitution!

Durch Integration ergibt sich zunächst die Bahnkurve zum Zeitpunkt t mit beliebiger Konstante:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \\ -\frac{\pi}{2}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt \end{pmatrix} = \left[\text{Substitution } w = \frac{\pi}{4}t\right] = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von $r(2)$ kann die Konstante bestimmt werden:

$$\mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und somit also } \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sqrt{2} \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den der Spieler entlang der Bahnkurve vom Zeitpunkt $t = 0$ bis $t = 3$ zurücklegt.

Der Weg entlang der Bahnkurve ergibt sich zu:

$$|\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^3 |\mathbf{r}'(t)|\ dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot (3 - 0) = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$$

c) Berechnen Sie den Vektor der mittleren Geschwindigkeit des Spielers zwischen $t = 0$ und $t = 3$.
Hinweis: $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *und* $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die mittlere Geschwindigkeit ergib sich aus:

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\int_0^3 \mathbf{v}(t)\, dt}{\int_0^3 dt} = \frac{\mathbf{r}(3) - \mathbf{r}(0)}{3} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \\ 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Hinweis:

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} - 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} \frac{2\cdot(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2\cdot(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben ist der Bereich $K = \left\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ in Kugelkoordinaten. K ist die über der xy-Ebene liegende Halbkugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius 1.

Berechnen Sie
$$\iiint\limits_K z^4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV.$$

Mit den aus der Vorlesung bekannten Kugelkoordinaten
$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ und unter Beachtung der Funktionaldeterminante $r^2\sin\theta$ beim Übergang von kartesischen auf Kugelkoordinaten folgt:

$$\iiint\limits_K z^4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (r\cos\theta)^4 \underbrace{\sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta}}_{=r\sqrt{sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta}=r\sqrt{sin^2\theta+cos^2\theta}}\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^7\cos^4\theta\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^8}{8}\cos^4\theta\sin\theta\Big|_{r=0}^1\,d\theta\,d\varphi$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=} -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_1^0 u^4\,du\,d\varphi = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{u^5}{5}\Big|_{u=1}^0\,d\varphi = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$$

b) Ein Zylinder $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3,0 \; ; 0 \leq z \leq 4\}$ besitze die Dichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z}{z^2+1}, & 0 \leq z \leq 2, \\ \frac{2}{3}, & 2 < z \leq 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse des Körpers.

Umrechnung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2 \leq 3$$

$$Substitution: \quad z^2+1 = u \Rightarrow dz = \frac{du}{2z}$$

$$\begin{aligned} \int_K \rho(x,y,z)\mathrm{d}V &= \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_2^4\int_0^{\sqrt{3}} r\frac{2}{3}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi}_{4\pi} + \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{3}} r\frac{z}{z^2+1}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\ &= 4\pi + 3\pi\left(\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u\right) \\ &= \pi\left(4+\frac{3}{2}\ln 5\right) \end{aligned}$$

• **Aufgabe 3.**

Faust und Gretchen sind verliebt und üben eine Kraft aufeinander aus, die als Gradientenfeld darstellbar ist. Wenn sich Gretchen im Zentrum befindet, wirkt auf Faust die Kraft$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ mit

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x, y, z) = 30xyz - 40x^2 + 20yz - 20e^{\sin(y)}.$$

(a) Berechnen sie das Kraftfeld der Liebe$\mathbf{F}$.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30yz - 80x \\ 30xz + 20z - 20e^{\sin(y)}\cos(y) \\ 30xy + 20y \end{pmatrix}$$

(b) Faust muss jeden Tag zur Physikvorlesung. Berechnen Sie die Arbeit, die er gegen die Kraft der Liebe verrichten muss, um von seinem geliebtem Gretchen zur Vorlesung zu kommen. Der Weg lässt sich durch die Kurve C beschreiben, welche durch die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t)^2 + \sin(t)\cos(t) \\ t - \sin(t)^2 e^{\cos(t)} \\ 3 - 2\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Arbeit $W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, die Faust gegen die Kraft verrichtet.

Da es sich um ein Gradientenfeld handelt, hängt das Kurvenintegral nur von Anfangspunkt und Endpunkt ab:

$$W = \int_C \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi(\boldsymbol{r}(\pi)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0))$$

$$\boldsymbol{r}(\pi) = (3, \pi, 5), \qquad \boldsymbol{r}(0) = (3, 0, 1)$$

Einsetzen:

$$W = 450\pi - 360 + 100\pi - 20 + 360 + 20 = 550\pi$$

(c) Professor A. More beschäftigt sich schon länger mit der Kraft der Liebe. Er untersucht das von Gretchen verursachte Kraftfeld, indem er die Richtungsableitung von Φ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = (-4, 2, 4)$ an der Stelle $(2, \pi, 1)$ berechnet.

Die Richtungsableitung ist das Skalarprodukt aus Gradient $\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ und Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{a}}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{6}(-4, 2, 4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\boldsymbol{a}}}(2,\pi,1) = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla\Phi(2,\pi,1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}30\pi - 160\\100\\80\pi\end{pmatrix} = \frac{-120\pi + 640 + 200 + 320\pi}{6}$$

$$= \frac{200\pi + 840}{6}$$