Institut für Analysis und Scientific Computing
C. Heitzinger

TU Wien
WS 2016

# PRAKTISCHE MATHEMATIK FÜR TPH (103.089)

## 2. Haupttest (Di., 24.01.2016) *(mit Lösung)*

— *Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 30* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen,**
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** ∘

- **Aufgabe 1.**

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$3x^2y'(x) = 6xy^2 - 4y'(x).$$

Die gegebene Differentialgleichung ist separabel, da

$$(3x^2+4)y' = 6xy^2,$$
$$\frac{y'}{y^2} = \frac{6x}{3x^2+4}.$$

Integration (Gleichung (5.39) im Skriptum) liefert

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y},$$
$$\int \frac{6x}{3x^2+4}dx = \ln(3x^2+4),$$

also

$$-\frac{1}{y} = \ln(3x^2+4) + C.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(3x^2+4)+C}.$$

(b) Geben Sie die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$y(0) = -\frac{1}{\ln 4}$$

an.

Die Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = -\frac{1}{\ln 4} = -\frac{1}{\ln 4 + C},$$

also

$$y(x) = -\frac{1}{\ln(3x^2+4)}.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{2}{3} + 2\frac{y(x)}{x^2} - \frac{2}{x}y'(x) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist.

Durch Vergleich mit der Normalform $p(x, y) + q(x, y)y'(x) = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} p(x,y) &:= \frac{2}{3} + 2\frac{y}{x^2}, \\ q(x,y) &:= -\frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{x^2}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2}{x^2}.$$

Diese Differentialgleichung ist exakt.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung indem Sie verwenden, dass sie exakt ist, und verifizieren Sie die von Ihnen gefundene Lösung $y(x)$ durch Einsetzen.

Man löst die Differentialgleichung $(\frac{2}{3} + 2\frac{y}{x^2}) - \frac{2}{x}y'(x) = 0$, indem man das Potential $\Phi(x, y)$ bestimmt:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int \left(\frac{2}{3} + 2\frac{y}{x^2}\right) dx + C(y) = \frac{2}{3}x - \frac{2y}{x} + C(y),\\
\Phi(x,y) &= \int -\frac{2}{x}\, dy + C(x) = -\frac{2y}{x} + D(x),\\
\Longrightarrow \Phi(x,y) &= \frac{2}{3}x - \frac{2y}{x}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt die implizite Gleichung $\Phi(x, y) = C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2}{3}x - \frac{2y}{x} = C \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{Cx}{2} + \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{3} + C_2 x.$$

Probe durch Einsetzen in die ursprüngliche Differentialgleichung:

$$\begin{gathered}
y'(x) = \frac{2}{3}x + C_2,\\
\frac{2}{3} + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{3} + C_2 x\right) - \frac{2}{x}\left(\frac{2}{3}x + C_2\right),\\
0 = 0 \quad \forall x.
\end{gathered}$$

(c) Berechnen Sie die Lösung, die die Bedingung $y(2) = 0$ erfüllt.

$$y(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{3} + 2C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x.$$

- **Aufgabe 3.**

(a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$a\ddot{\phi}(t) + b\dot{\phi}(t) + c\phi(t) = F(t)$$

für einen linearen Oszillator mit Dämpfung und geben Sie die allgemeine Lösung (als reelle Funktion) der homogenen Gleichung für

$$a := 2, \quad b := 4, \quad c := 10, \quad F(t) := 10t^2 + 3t + 3$$

an.

Die homogene Gleichung ist

$$2\ddot{\phi} + 4\dot{\phi} + 10\phi = 0.$$

Exponentialansatz $\phi_h = e^{\lambda t}$ ergibt

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 10 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = -1 + 2i, \quad \lambda_2 = -1 - 2i.$$

Als Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man somit

$$\phi_h(t) = e^{-t}(C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}) = e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, dass Sie in (a) ein Fundamentalsystem gefunden haben.

Zum Überprüfen der linearen Unabhängigkeit der Basisfunktionen des Lösungsraums bilden wir die Fundamentalmatrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(2t) & e^{-t}\sin(2t) \\ e^{-t}(-\cos(2t) - 2\sin(2t)) & e^{-t}(-\sin(2t) + 2\cos(2t)) \end{pmatrix}$$

und berechnen ihre Determinante:

$$\det(Y(t)) = e^{-2t}(2\cos^2(2t) + 2\sin^2(2t) - \sin(2t)\cos(2t) + \sin(2t)\cos(2t)) = 2e^{-2t}.$$

Da $e^{\alpha t} > 0$, folgt $\det(Y(t)) \neq 0$ und die beiden Lösungen der homogenen Gleichung sind linear unabhängig und bilden daher ein Fundamentalsystem.

(c) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{\phi}(t) - 4\dot{\phi}(t) + 3\phi(t) = 10\cos(t)$$

eines Oszillators mit periodischer äußerer Kraft. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung sowie eine partikuläre Lösung und geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an.

Der Ansatz $\phi_h = e^{\lambda t}$ ergibt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Als Lösung der homogenen Differentialgleichung erhält man somit

$$\phi_h = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

Für die partikuläre Lösung benützt man den Ansatz $\phi_p = A\cos(t) + B\sin(t)$ und setzt ihn in die inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \phi_p &= A\cos(t) + B\sin(t) \\ \dot{\phi}_p &= -A\sin(t) + B\cos(t) \\ \ddot{\phi}_p &= -A\cos(t) - B\sin(t) \\ 2A\cos(t) + 2B\sin(t) + 4A\sin(t) - 4B\cos(t) &= 10\cos(t). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2A - 4B &= 10 \\ 4A + 2B &= 0 \\ A = 1, \quad B &= -2 \\ \Longrightarrow \quad \phi_p &= \cos(t) - 2\sin(t). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$\phi = \phi_h + \phi_p = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + \cos(t) - 2\sin(t).$$