1. Betrachten Sie die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) \colon t \in [0,\pi]\}$ und ein Vektorfeld $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x\cos y + 2\cos x \\ -3x^2\sin y - 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C für den Parameterwert $t_0 = 0$, sowie im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$.

   (b) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ wegunabhängig ist und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential Φ.

   (c) Berechnen Sie die Tangentialebene von $z = \Phi(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$.

   (d) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Lösung.

(a)

$$t : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}\prime(t_0) \cdot (t - t_0)$$

Mit $t_0 = 0$ folgt:

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}\prime(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}\prime(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die erste Tangente ergibt sich damit:

$$t_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die zweite Tangente im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ muss zuerst der Parameter t_0 ermittelt werden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0\cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{r}\prime\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach einsetzen, ausmultiplizieren und umordnen erhält man:

$$t_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\nabla \times \boldsymbol{F} \overset{!}{=} \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6x\cos y + 2\cos x \\ -3x^2 \sin y - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6x\sin y + 6x\sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\boldsymbol{F} = \nabla\Phi(x,y) \Rightarrow F_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\Phi(x,y) = \int F_x dx = 3x^2\cos y + 2\sin x + C(y)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -3x^2\sin y + \frac{\partial C}{\partial y} = -3x^2\sin y - 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -1 \Rightarrow C(y) = -y + C$$

$$\Phi(x,y) = 3x^2\cos y + 2\sin x - y + C$$

(c) Zuerst bestimmen wir über $\Phi(x_0,y_0) = -1$ unsere Konstante bestimmen.

$$\Phi(x_0,y_0) = -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0$$

Nun können wir unsere Werte in die allgemeine Darstellung für Tangentialebenen einsetzen.

$$t = \Phi(x_0,y_0) + \nabla\Phi(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$t = -1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} = 2x - y$$

(d) Da unser Vektorfeld wegunabhängig ist kann das Kurvenintegral am Potential ausgewertet werden.

$$\int_C \boldsymbol{F} dr = \Phi(\boldsymbol{r}(\pi)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = \Phi(-\pi,0) - \Phi(0,0) = 3\pi^2$$

2. Die Bahn eines Teilchens ist durch die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) \colon t \in [0,\pi]\}$ gegeben. Es ist bekannt, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ des Teilchens gegeben ist durch

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-2t} \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Positionsvektor $\boldsymbol{r}(t)$, sowie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$, wenn gilt

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Bogenlänge $s = s(t)$, für $t \in [0, \pi]$, gegeben ist durch

$$s(t) = 2\int_0^t \sqrt{\mathrm{e}^{-4\tau} + 1}\,\mathrm{d}\tau. \tag{1}$$

Berechnen Sie im Anschluss $s(t)$, indem Sie das Integral in Gleichung (1) mit Hilfe der Substitution

$$u^2 = \mathrm{e}^{-4\tau} + 1$$

berechnen, und lösen Sie das in der Folge auftretende Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

(c) Berechnen Sie das Differential der Bogenlänge $\mathrm{d}s$, sowie für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

das Kurvenintegral

$$\int_C f\,\mathrm{d}s.$$

Lösung.

(a)

$$v_1(t) = \int a_1(t)\,dt = 2e^{-2t} + C$$

C kann nun aus der Anfangsbedingung bestimmt werden.

$$v_1(0) = 0 \to C = 0$$

Der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}(t)$ und Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}(t)$ lauten damit:

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(2e^{-2t}, 2\sin(2t), 2\cos(2t)\right)$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(-4e^{-2t}, 4\cos(2t), -4\sin(2t)\right)$$

$$r_1(t) = \int v_1(t)\,dt = -e^{-2t} + C_1$$

C_1 kann nun ebenfalls durch die Anfangsbedingung ermittelt werden.

$$r_1(0) = -1 \to C_1 = 0$$

Analog dazu werden die weiteren Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}(t)$ bestimmt.

$$r_2(t) = \int v_2(t)\,dt = -\cos(2t) + C_2$$

$$r_2(0) = -1 \to C_2 = 0$$

$$r_3(t) = \int v_3(t)\,dt = \sin(2t) + C_3$$

$$r_3(0) = 0 \to C_3 = 0$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(-e^{-2t}, -\cos(2t), \sin(2t)\right)$$

(b)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$$

Das Differential der Bogenlänge ds lautet damit:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{4e^{-4t} + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{e^{-4t} + 1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(t) &= \int \mathrm{d}s = 2\int_0^t \sqrt{e^{-4\tau} + 1}\,\mathrm{d}\tau \\ f(\boldsymbol{r}) &= \sqrt{e^{-4t} + \cos^2 2t + \sin^2 2t} = \sqrt{e^{-4t} + 1}\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral wird damit zu:

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{d}s &= 2\int_0^\pi \sqrt{e^{-4t} + 1}\sqrt{e^{-4t} + 1}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^\pi e^{-4t} + 1\mathrm{d}t \\ &= 2(-\frac{1}{4}e^{-4t} + t)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2} + 2\pi - \frac{1}{2}e^{-4\pi}\end{aligned}$$

(c)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t$$

Das Differential der Bogenlänge ds lautet damit:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{4e^{-4t} + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{e^{-4t} + 1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Zum Lösen des Integrals kann folgende Substitution verwendet werden:

$$\begin{aligned}u^2 &= e^{-4\tau} + 1 \Leftrightarrow u^2 - 1 = e^{-4\tau} \\ 2u\mathrm{d}u &= -4e^{-4\tau}\mathrm{d}\tau \\ \mathrm{d}\tau &= -\frac{1}{2}\frac{u}{u^2 - 1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Damit kann das Integral berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int \mathrm{d}s = 2\int \sqrt{e^{-4\tau}+1}\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\int \sqrt{u^2}\frac{u}{u^2-1}\mathrm{d}u \\
&= -\int \frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u = -\int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u = -\int 1+\frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u \\
&= -(u-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\mathrm{d}u) \\
&= -(u+\ln|u+1|-\ln|u-1|)+C \\
&= -u+\frac{1}{2}\ln|\frac{u+1}{u-1}|+C \\
&= -\sqrt{e^{-4\tau}+1}+\frac{1}{2}\ln|\frac{\sqrt{e^{-4\tau}+1}+1}{\sqrt{e^{-4\tau}+1}-1}|+C \\
s(t) &= \sqrt{2}-\sqrt{e^{-4\pi}+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^{-4\pi}+1}+1}{\sqrt{e^{-4\pi}+1}-1}
\end{aligned}
$$

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = z\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

und ein Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben durch

$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 1\le x^2+y^2\le 2, 0\le z\le 4\}.$$

(a) Berechnen Berechnen Sie die Richtungsableitung von f, abhängig von x,y,z, in Richtung von

$$\boldsymbol{v} = (1,0,1)^T.$$

(b) Skizzieren Sie B.

(c) Berechnen Sie das Volumen von B mit Hilfe eines Bereichsintegrals.

(d) Schreiben Sie $\int_B f\,\mathrm{d}V$ als iteriertes Integral in kartesischen Koordinaten an, *ohne* es anschließend zu berechnen.

(e) Berechnen Sie $\int_B f\,\mathrm{d}V$ unter der Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Lösung.

(a) Die Richtungsableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{v}}.$$

Man benötigt den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{v}}$ des Vektors $\boldsymbol{v}$:

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

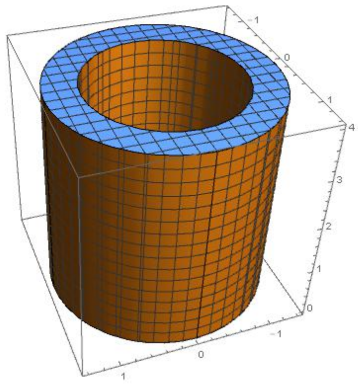
Für den Gradienten erhält man

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2xz\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ -2yz\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

und daher

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2xz\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ -2yz\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{\sqrt{2}}(1-2xz).$$

(b) Hohlzylinder mit Wanddicke $\sqrt{2}-1$ und Höhe 4



(c)

$$V = \int_B dV = \int_{z=0}^{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{\sqrt{2}} r\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$= 2\pi \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = 4\pi$$

(d)

$$\int_B f\,dV = \int_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{z=0}^{4} z\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dz\,dy\,dx - \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{4} z\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dz\,dy\,dx$$

(e)

$$\int_B f\,dV = \int_{z=0}^{4}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{\sqrt{2}} z\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= 8\cdot 2\pi\cdot\int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-r^2}\,r\,dr = \left|\begin{array}{c} r^2 = u \\ \\ 2r\,dr = du \end{array}\right| =$$

$$= 8\cdot\pi\int \mathrm{e}^{-u}\,du = -8\pi\;\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= -8\pi\left(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\right) = 8\pi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$$