1. (a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(y^2 + y\sin x)\,\mathrm{d}x + (2xy - \cos x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist, berechnen Sie ein erstes Integral und für
$\Phi(0,0) = 0$ die Lösung $y = y(x)$ für $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, $y(x) = \frac{\cos x}{x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^3y'' + 2x^2y' = -x^2\cos x.$$

(c) Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung aus (b), der Form

$$x^3y'' + 2x^2y' = 0.$$

$y_1(x) = \frac{2}{x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. Finden Sie eine weitere linear unabhängige Lösung y_2. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Lösung.

(a) Die Differentialgleichung ist exakt weil

$$P_y = 2y + \sin(x) \qquad Q_x = 2y + \sin(x).$$

Ein erstes Integral berechnet man durch

$$\Phi(x,y) = \int y^2 + y\sin(x)\,\mathrm{d}x = y^2x - y\cos(x) + c(y),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2xy - \cos(x) + c'(y) = Q.$$

Dadurch erhält man $c'(y) = 0$, also ist $c(y) = c_0$ und

$$\Phi(x,y) = xy^2 - y\cos(x) + c_0.$$

Mit der Anfangsbedinung ergibt sich

$$\Phi(0,0) = 0\cdot 0 - 0\cdot 1 + c_0 = 0$$

und für das erste Integral

$$\Phi(x,y) = xy^2 - y\cos(x).$$

(b) Um die Lösung zu überprüfen berechnet man die erste und zweite Ableitung und setzt diese in die Differentialgleichung ein.

$$y' = \frac{-x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{(-(\sin(x) + x\cos(x)) + \sin(x))x^2 + (x\sin(x) + \cos(x))2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-\cos(x)}{x} + \frac{2\sin(x)}{x^2} + \frac{2\cos(x)}{x^2}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhält man $-x^2\cos(x)$, was mit der Lösung übereinstimmt.

(c) Für die zweite linear unabhängige Lösung wählt man den Ansatz $y_2 = \frac{c(x)}{x}$ mit

$$y_2' = \frac{c'x - c}{x^2} \qquad y_2'' = \frac{(c''x + c' - c')x^2 - (c'x - c)2x}{x^4}.$$

Die Ableitungen setzt man in die Differentialgleichung ein, wodurch man

$$x^3 \frac{c''x - 2xc' + 2xc}{x^4} + 2x^2 \frac{c'x - c}{x^2} = 0$$

erhält und nach kürzen

$$c'' - 2xc' + 2c + 2c'x - 2c = 0.$$

Es ergibt sich $c'' = 0$, also $c' = c_0$ und $c'' = c_0 x + c_1$. Die zweite linear unabhängige Lösung lautet

$$y_2(x) = c_0 + c_1 \frac{1}{x}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 + \frac{\cos(x)}{x}.$$

2. (a) Berechnen Sie die Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

(b) Wählen Sie einen passenden Ansatz und bestimmen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 4y = 5\mathrm{e}^x.$$

(c) Betrachten Sie die Funktion $u(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{-2t}$. Berechnen Sie die Funktion f aus der partiellen Differentialgleichung

$$3u_x + u_{xx} = u_{tt},$$

mit den Randbedingungen $u(0,0) = 2$ und $u(1,0) = 2\mathrm{e}$.

Lösung.

(a) Die homogene Lösung findet man über den Ansatz $y_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Diesen leitet man ab, setzt ihn in die homogene Differentialgleichung ein und kürzt die Exponentialfunktion. Dadurch erhält man

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0.$$

Diese Gleichung kann man mit der kleinen Lösungsformel lösen und man bekommt $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -4$. Die homogene Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y_h = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-4x}.$$

(b) Für die partikuläre Lösung wählt man den Ansatz $y_p = Ax\mathrm{e}^x$. Diesen leitet man ebenfalls zweimal ab und setzt ihn die inhomogene Differentialgleichung ein. Man bekommt

$$A(2+x)\mathrm{e}^x + 3A(1+x)\mathrm{e}^x - 4Ax\mathrm{e}^x = 5\mathrm{e}^x$$

und kann die Gleichung kürzen auf

$$2A + 3A = 5.$$

Damit ist $A = 1$ und $y_p = x\mathrm{e}^x$.

(c) Zunächst berechnet man die passenden Ableitungen

$$u_x = f'(x)\mathrm{e}^{-2t} \qquad u_{xx} = f''(x)\mathrm{e}^{-2t}$$

$$u_t = -2f(x)\mathrm{e}^{-2t} \qquad u_{tt} = 4f(x)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Diese setzt man ein und erhält

$$3f'(x)\mathrm{e}^{-2t} + f''(x)\mathrm{e}^{-2t} = 4f(x)\mathrm{e}^{-2t},$$

bzw.

$$f''(x) + 3f'(x) - 4f(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung entspricht jener aus (a), deswegen kennen wir die Lösung $f(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}$. Diese Lösung kann man nun einsetzen

$$u(x,t) = (c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-4x})\mathrm{e}^{-2t}$$

und die Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen errechnen.

$$u(0,0) = c_1 + c_2 = 2 \qquad c_1 = 2 - c_2$$

$$u(1,0) = c_1\mathrm{e}^{1} + c_2\mathrm{e}^{-4} = (2-c_2)\mathrm{e}^{1} + c_2\mathrm{e}^{-4} = 2\mathrm{e}^{1}$$

Somit ist $c_2 = 0$ und $c_1 = 2$ und

$$u(x,t) = 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-2t}.$$

3. Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $\{1,2,3,4\}$ annehmen kann. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P(X=1) = \tfrac{1}{6}, \qquad P(X=2) = \tfrac{1}{3}, \qquad P(X=3) = c, \qquad P(X=4) = 2c.$$

(a) Berechnen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, geben Sie die Verteilungsfunktion an und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}$ und die Varianz $\mathbb{V}$.

(c) Zwei Ereignisse sind gegeben durch $A = \{X \leq 2\}$ und $B = \{1 < X \leq 3\}$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$ und $P(A|B)$.

(d) Es sind $H_1 = \{1 \leq X \leq 2\}$ und $H_2 = \{3 \leq X \leq 4\}$ zwei disjunkte Ereignisse, sowie D ein Ereignis für welches die Wahrscheinlichkeiten

$$P(D|H_1) = \tfrac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad P(D^C|H_2) = \tfrac{1}{4}$$

gegeben sind. Berechnen Sie $P(D)$.

Lösung.

(a) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben also berechnet man c über

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + c + 2c = 1,$$

so erhält man für $c = \frac{1}{6}$. Die Verteilungfunktion ergibt sich zu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}.$$

(b) Den Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen berechnet man hier über

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

Die Varianz berechnet man über $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, also

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{3} = \frac{25}{3}$$

und gesamt

$$\mathbb{V}(X) = \frac{25}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}.$$

(c) Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich zu

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \qquad P(A \cap B) = P(X = 2) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Die passenden Werte setzen nur mehr ein und erhalten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

(d) Wieder berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten und erhalten

$$P(H_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \qquad P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{1}{2}.$$

Weiters ist

$$P(D|H_2) = 1 - P(D^C|H_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

und über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet man

$$P(D) = P(D|H_1)P(H_1) + P(D^C|H_2)P(H_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{40}.$$