

1. (a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(y^2 - y \cos x) dx + (2xy - \sin x) dy = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist, berechnen Sie ein erstes Integral und für

$\Phi(0,0) = 0$ die Lösung $y = y(x)$ für $x \neq 0$.

- (b) Zeigen Sie, $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = -x^2 \sin x.$$

- (c) Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung aus (b), der Form

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0.$$

$y_1(x) = \frac{3}{x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. Finden Sie eine weitere linear unabhängige Lösung y_2 . Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Lösung.

- (a) Die Differentialgleichung ist exakt weil

$$P_y = 2y + \cos(x) \quad Q_x = 2y + \cos(x).$$

Ein erstes Integral berechnet man durch

$$\Phi(x, y) = \int y^2 - y \cos(x) dx = y^2 x - y \sin(x) + c(y),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2xy - \sin(x) + c'(y) = Q.$$

Dadurch erhält man $c'(y) = 0$, also ist $c(y) = c_0$ und

$$\Phi(x, y) = xy^2 - y \sin(x) + c_0.$$

Mit der Anfangsbedingung ergibt sich

$$\Phi(0,0) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + c_0 = 0$$

und für das erste Integral

$$\Phi(x, y) = xy^2 - y \sin(x).$$

- (b) Um die Lösung zu überprüfen berechnet man die erste und zweite Ableitung und setzt diese in die Differentialgleichung ein.

$$y' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$y'' = \frac{((\cos(x) + x \sin(x) + \cos(x))x^2 - (x \cos(x) + \sin(x))2x)}{x^4}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhält man $-x^2 \sin(x)$, was mit der Lösung übereinstimmt.

- (c) Für die zweite linear unabhängige Lösung wählt man den Ansatz $y_2 = 3\frac{c(x)}{x}$ mit

$$y_2' = 3\frac{c'x - c}{x^2} \quad y_2'' = 3\frac{(c''x + c' - c')x^2 - (c'x - c)2x}{x^4}.$$

Die Ableitungen setzt man in die Differentialgleichung ein, wodurch man

$$3x^3\frac{c''x - 2xc' + 2xc}{x^4} + 6x^2\frac{c'x - c}{x^2} = 0$$

erhält und nach kürzen

$$3c'' - 2xc' + 2c + 2c'x - 2c = 0.$$

Es ergibt sich $c'' = 0$, also $c' = c_0$ und $c'' = c_0x + c_1$. Die zweite linear unabhängige Lösung lautet

$$y_2(x) = 3(c_0 + c_1\frac{1}{x}).$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = 3(c_1\frac{1}{x} + c_2 + \frac{\sin(x)}{x}).$$

2. (a) Berechnen Sie die Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' - 9y = 0.$$

- (b) Wählen Sie einen passenden Ansatz und bestimmen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' - 9y = 10e^{-9x}.$$

- (c) Betrachten Sie die Funktion $u(x, t) = f(x)e^{-3t}$. Berechnen Sie die Funktion f aus der partiellen Differentialgleichung

$$8u_x + u_{xx} = u_{tt},$$

mit den Randbedingungen $u(0, 0) = 2$ und $u(1, 0) = 2e$.

Lösung.

- (a) Die homogene Lösung findet man über den Ansatz $y_h = e^{\lambda t}$. Diesen leitet man ab, setzt ihn in die homogene Differentialgleichung ein und kürzt die Exponentialfunktion. Dadurch erhält man

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0.$$

Diese Gleichung kann man mit der kleinen Lösungsformel lösen und man bekommt $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -9$. Die homogene Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{-9x}.$$

- (b) Für die partikuläre Lösung wählt man den Ansatz $y_p = Axe^x$. Diesen leitet man ebenfalls zweimal ab und setzt ihn in die inhomogene Differentialgleichung ein. Man bekommt

$$A(2 + x)e^x + 8A(1 + x)e^x - 9Axe^x = 10e^{-9x}$$

und kann die Gleichung kürzen auf

$$-10A = 10.$$

Damit ist $A = -1$ und $y_p = -xe^{-9x}$.

(c) Zunächst berechnet man die passenden Ableitungen

$$\begin{aligned}u_x &= f'(x)e^{-3t} & u_{xx} &= f''(x)e^{-3t} \\u_t &= -3f(x)e^{-3t} & u_{tt} &= 9f(x)e^{-3t}.\end{aligned}$$

Diese setzt man ein und erhält

$$8f'(x)e^{-3t} + f''(x)e^{-3t} = 9f(x)e^{-3t},$$

bzw.

$$f''(x) + 8f'(x) - 9f(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung entspricht jener aus (a), deswegen kennen wir die Lösung $f(x) = c_1e^x + c_2e^{-9x}$. Diese Lösung kann man nun einsetzen

$$u(x, t) = (c_1e^x + c_2e^{-9x})e^{-3t}$$

und die Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen errechnen.

$$u(0, 0) = c_1 + c_2 = 2 \quad c_1 = 2 - c_2$$

$$u(1, 0) = c_1e^1 + c_2e^{-4} = (2 - c_2)e^1 + c_2e^{-4} = 2e^1$$

Somit ist $c_2 = 0$ und $c_1 = 2$ und

$$u(x, t) = 2e^xe^{-3t}.$$

3. Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $\{1, 2, 3, 4\}$ annehmen kann. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = 2c, \quad P(X = 4) = c.$$

- (a) Berechnen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, geben Sie die Verteilungsfunktion an und skizzieren Sie diese.
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert \mathbb{E} und die Varianz \mathbb{V} .
- (c) Zwei Ereignisse sind gegeben durch $A = \{X \leq 2\}$ und $B = \{1 < X \leq 3\}$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$ und $P(A|B)$.
- (d) Es sind $H_1 = \{1 \leq X \leq 2\}$ und $H_2 = \{3 \leq X \leq 4\}$ zwei disjunkte Ereignisse, sowie D ein Ereignis für welches die Wahrscheinlichkeiten

$$P(D|H_1) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(D^C|H_2) = \frac{1}{5}$$

gegeben sind. Berechnen Sie $P(D)$.

Lösung.

- (a) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben also berechnet man c über

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 2c + c = 1,$$

so erhält man für $c = \frac{1}{6}$. Die Verteilungsfunktion ergibt sich zu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{6} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}.$$

(b) Den Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen berechnet man hier über

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3}.$$

Die Varianz berechnet man über $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, also

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{2}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{3}$$

und gesamt

$$\mathbb{V}(X) = \frac{20}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}.$$

(c) Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich zu

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad P(A \cap B) = P(X = 2) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Die passenden Werte setzen nur mehr ein und erhalten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}.$$

(d) Wieder berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten und erhalten

$$P(H_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad P(H_2) = 1 - P(H_1) = \frac{1}{2}.$$

Weiters ist

$$P(D|H_2) = 1 - P(D^C|H_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

und über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet man

$$P(D) = P(D|H_1)P(H_1) + P(D^C|H_2)P(H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$