1. **Kugelkoordinaten.** Gegeben ist der Vektor $\boldsymbol{v} = (-6, 1, 5)^T$. Berechnen Sie die Norm des Vektors, sowie den Azimutwinkel φ und den Polarwinkel ϑ der zugehörigen Kugelkoordinaten. Der Winkel φ ist im Intervall $[0, 2\pi)$ anzugeben, der Winkel ϑ im Intervall $[0, \pi]$.
   Berechnen Sie weiters die kartesische Darstellung des Vektors $\boldsymbol{w}$, welcher in Kugelkoordinaten gegeben ist, mit $|\boldsymbol{w}| = 4$, $\varphi = \frac{12}{7}\pi$ und $\vartheta = \frac{1}{3}\pi$.
   Lösung: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{62}$, $\varphi = \arctan \frac{1}{-6} + \pi$, $\vartheta = \arccos \frac{5}{\sqrt{62}}$, $w_x = 4 \sin \frac{1}{3}\pi$, $\cos \frac{12}{7}\pi$, $w_y = 4 \sin \frac{1}{3}\pi \sin \frac{12}{7}\pi$, $w_z = 4 \cos \frac{1}{3}\pi$

2. **Zylinderkoordinaten.** Berechnen Sie die Zylinderkoordinaten des Vektors $\boldsymbol{v} = (9, 3, -2)^T$. Berechnen Sie weiters für den Vektor $|\boldsymbol{w}| = 4$, $\varphi = \frac{10}{32}\pi$ und $z = -4$ die kartesischen Koordinaten.
   Lösung: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{94}$, $\varphi = \arctan \frac{3}{9}$, $w_x = 4 \sin \frac{10}{32}\pi$, $w_y = 4 \cos \frac{10}{32}\pi$, $w_z = -4$

3. **Beispiel 2.4.** Ein Massepunkt bewegt sich, ausgehend vom Usprung, 2 cm in die Richtung des Vektors $(1, 1, 1)^T$, dann 5 cm in die negative $x-$Richtung, und schließlich 3 cm in die Richtung des Vektors $(2, 1, -2)^T$. Man bestimme die Koordinaten des Massepunktes am Ende der Bewegung.
   Lösung: $\boldsymbol{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 - 3\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}\right)^T [cm]$

4. **Beispiel 2.5.** Die Bahn eines Massepunktes ist gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2 + 7, 2t^3 - 1, t\right)^T$. Man berechne die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.
   Lösung: $|\boldsymbol{v}(1)| = \sqrt{41}$

5. **Beispiel 2.6.** Die Geschwindigkeit eines Massepunktes ist gegeben durch $\boldsymbol{v}(t) = \left(1, t, 3t^2\right)$, und seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$, ist $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 1)$. Man bestimme die Bahn des Massepunktes.
   Lösung: $\boldsymbol{r}(t) = \left(t + 1, \frac{t^2}{2}, t^3 + 1\right)$

6. **Beispiel 2.7.** Man bestimme zwei Darstellungen für die Tangente an die Bahnkurve aus der vorhergehenden Aufgabe zum Zeitpunkt $t = 2$, einseits durch eine Parameterdarstellung als geradlinig-gleichförmige Bewegung, andererseits durch zwei Gleichungen für die $x-, y-$ und $z-$ Koordinaten.
   Lösung: $2x - y = 4, \quad 6y - z = 3$

7. **Beispiel 3.6.** Man bestimme eine Parameterdarstellung für die rechte Hälfte des Kreises mit dem Mittelpunkt $(3, -1)$ und dem Radius 2, wobei der Halbkreis im Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.
   Lösung: $\boldsymbol{r}(\varphi) = (3 + 2\cos\varphi, -1 - 2\sin\varphi)^T$

8. **Gerade.** Gegeben sind zwei Punkte $A = (-7, -3)^T$ und $B = (0, -2)^T$. Berechnen Sie die Parameterdarstellung der Geraden durch A und B und geben Sie diese als Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ an.
   Berechnen Sie weiters die Länge s der Kurve zwischen dem Punkt A und dem Punkt $P = (-28, -6)^T$.
   Berechnen Sie außerdem die Orthogonalprojektion $P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})$ des Vektors $\boldsymbol{w} = (-1, 1)^T$ auf den Richtungsvektor $\boldsymbol{v}$ der Geraden.
   Lösung: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (7t, t - 2)^T$, $s = \sqrt{450}$, $P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \left(-\frac{42}{50}, -\frac{6}{50}\right)^T$

9. **Parametrisierung.** Gegeben sei die Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(t+1, t^2+1\right)^T$ mit $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen die Parametrisierung erfüllt, und weisen Sie dies nach:

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 - y &= 1 \qquad (1)\\
x^2 - (y-1)^2 &= 1 \qquad (2)\\
y - (x-1)^2 &= 1 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie weiters die Funktion f, um $y = f(x)$ explizit anzugeben. Geben Sie außerdem die zugehörigen Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$, sowie die Gleichung der Tangente $y = t(x)$ an die Kurve im Punkt $(x, y)^T = (3, 5)^T$ an. Zuletzt bestimmen Sie die Gleichung der zur Tangente orthogonalen Geraden $y = h(x)$ durch den Punkt $(x, y)^T = (3, 5)^T$.
Lösung: $t(x) = 4x - 7$, $h(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

10. **Beispiel 3.1** Man berechne die Richtungsableitung von $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ in Richtung $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ an der Stelle $(1, 1)$. Man skizziere die Höhenschichtenlinie, auf der $(1, 1)$ liegt und zeichne auch $\nabla f(1, 1)$ als kleinen Pfeil ein.
Lösung: $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = -3\sqrt{2}$