1. **Beispiel 3.3.** Man bestimme die Richtungsableitung von $f(x,y) = xy - 3y^2$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, wobei $\boldsymbol{a} = (3,4)$ mit Hilfe des Gradienten.

   Lösung. $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{1}{5}(4x - 21y)$

2. **Gradient, totales Differential, Tangentialebene.** Sei f eine Skalarfeld gegeben durch $f(\boldsymbol{r}) = f(x,y) = x^2 + xy - 3y^2 + x - 3y + 1$.

   (a) Berechnen Sie den Gradient von f.

   (b) Berechnen Sie die Tangentialebene für $\boldsymbol{r_0} := (x_0, y_0) = (-1, 1)$.

   (c) Berechnen Sie das totale Differential von $z = f(x,y)$.

   (d) Berechnen Sie den Gradienten und das totale Differential an $\boldsymbol{r_0}$, sowie

   $$\boldsymbol{g} = \frac{1}{|\nabla f(\boldsymbol{r_0})|} \nabla f(\boldsymbol{r_0}).$$

   (e) Berechnen Sie für $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$

   $$\Delta z_1 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{g}) - f(\boldsymbol{r_0}), \qquad \Delta z_2 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{r_0})$$

   Lösung. (a) $\nabla f(\boldsymbol{r}) = (2x + y + 1, x - 6y - 3)$, (b) $-10y + z = 4$,
   (c) $\mathrm{d}z = (2x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (x - 6y - 3)\,\mathrm{d}y$, (d) $\nabla f(\boldsymbol{r_0}) = (0, -10)$, $\mathrm{d}z = -10\,\mathrm{d}y$,
   (e) $\Delta z_1 = 7$, $\Delta z_2 \approx 6{,}5858$

3. **Kettenregel.** Sei $h\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = (\cos t)^{\sin t}$. Berechnen Sie die Ableitung h' auf zwei Arten:

   (a) Durch Differenzieren von h mit Hilfe der Ableitungsregeln.

   (b) Anwendung der Kettenregel auf $h = f \circ \boldsymbol{r}$ mit

   $$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(x,y) = x^y.$$

   Geben Sie geeignete Definitionsbereiche für f und g an.

   Lösung. (a) $h'(t) = (\cos t)^{\sin t} \left(\cos t \ln(\cos t) - \frac{\sin^2 t}{\cos t} \right)$, (b) $\boldsymbol{r}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$,
   $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

4. **Bogenlänge in $\mathbb{R}^2$.** Gegeben ist die Kurve

   $$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(5t) \\ 3\cos(5t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

   Berechnen Sie die Funktion der Bogenlänge $s = s(t)$ und die gesamte Bogenlänge L.
   Lösung. $s(t) = 15t$, $L = 30\pi$

5. **Beispiel 3.8.** Eine logarithmische Spirale ist gegeben durch die Parameterdarstellung $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = e^{\alpha t}(\cos(t), \sin(t))\,, t \in \mathbb{R}$. Man bestimme eine Parameterdarstellung mit der Bogenlänge als Parameter.
   Lösung. z.B.: $\boldsymbol{r}(t(s)) = \big(x(t(s)), y(t(s)\big)$ mit $t(s) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{s\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right), \quad t(0) \to -\infty$

6. **Beispiel 3.11.** Man berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x-y, x^2)$ entlang der Strecke von $(1, 1)$ nach $(3, -2)$.
   Lösung. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -4$

7. **Beispiel 3.14.** Man berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F} = \big(2x - y, x^2\big)$ entlang der Kurve mit der Parameterdarstellung $\big(t, 1 - \frac{3}{4}(t-1)^2\big)$, $1 \leq t \leq 3$.
   Lösung. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -9$

8. **Beispiel 3.16.** Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -14yz \\ 20xz^2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \big(3x^2 + 6y\big)\, \mathrm{d}x - 14yz\, \mathrm{d}y + 20xz^2\, \mathrm{d}z$$

   (a) entlang der Kurve C mit der Parameterdarstellung $\big(t, t^2, t^3\big)$, $0 \leq t \leq 1$.
   (b) entlang der Strecke C von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$.

   Lösung. $(a) \displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 5$, $(b) \displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{13}{3}$