Praktische Mathematik 1 für TPH **Übungsblatt 3** 29.10.2019

1. **Gradient, Divergenz und Rotation.**

   (a) Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfeldes $\varphi(x, y, z) = x^5z^3 + 4y^3z^3 + 2z^2$.

   (b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3x^3, 3y^2z^2, z^3x^5)$.

   (c) Berechnen Sie die Rotation von $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ aus Aufgabe (b).

   Lösung. $(a)\, \nabla\varphi = (5x^4z^3 + 4x, 12y^2z^3, 3x^5z^2 + 12^3y^3z^2 + 4z)^T$
   $(b)\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = 3x^5z^2 + 6yz^2 + 9x^2$, $(c)\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} = (-6y^2z, -5x^4z^3, 0)^T$

2. **Identitäten rot, grad, div.** Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten, wobei $\boldsymbol{F}$ ein Vektorfeld und U ein Skalarfeld darstellen.

   (a) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\boldsymbol{F}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{F}) - \Delta\boldsymbol{F}$

   (b) $\mathrm{div}\,(U\boldsymbol{F}) = U\mathrm{div}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{grad}U$

   (c) $\mathrm{rot}\,(U\boldsymbol{F}) = U\mathrm{rot}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \times \mathrm{grad}U$

3. **Potentialproblem 2D Poly.** Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld

$$\boldsymbol{f} = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 12x^3y^2 + 4x^3 \\ 6x^4y + 6y^2 \end{pmatrix}.$$

   Lösung. $\varphi(x, y) = 3x^4y^2 + x^4 + 2y^3 + c$

4. **Beispiel 3.12.** Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder $\boldsymbol{F_1}(x, y) = \big(2x - y, x^2\big)$ und $\boldsymbol{F_2}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ Gradientenfelder sind.
   Lösung. $\boldsymbol{F_1}$ kein Gradientenfeld, $\Phi_2(x, y, z) = xyz$

5. **Kurvenintegral.** Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ entlang der Kurve $C = \left\{ r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi] \right\}$.

   Lösung: $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$

6. **Beispiel 3.13.** Man berechne das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)$ entlang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$,$(3, 4, 5)$,$(2, -2, -1)$, wobei die Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden (geschlossene stückweise glatte Kurve).

   Lösung. $\displaystyle\oint \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$

7. **Potentialproblem 3D Poly.** Gegeben ist ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 6x^5z^5 + 7x^6y^2 + 6x^5 \\ 2x^7y + 3y^2z^2 + 2y \\ 5x^6z^4 + 2y^3z + 2z \end{pmatrix}$$

   Welche Eigenschaften muss das Vektorfeld f haben, damit ein Potential φ mit Gradientenfeld f existiert? Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld f.
   Lösung. stetig, stetig differenzierbar, wirbelfrei, $\varphi(x, y, z) = x^6z^5 + x^7y^2 + x^6 + y^3z^2 + y^2 + z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$