

1. **Beispiel 4.1.** Man berechne die Ableitung des Parameterintegrals

$$I(x) = \int_x^{2x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy$$

auf zwei Arten (zuerst Integrieren, dann Differenzieren, bzw. umgekehrt).

**Lösung.**  $I(x) = -\cos(2) + \cos(1)$

2. **Beispiel 4.8.** Man skizziere die Lemniskate  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  und berechne den von ihr eingeschlossenen Flächeninhalt mittels Polarkoordinaten.

**Lösung.**  $A = 2a^2$

3. **Fläche Rechteck.** Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks  $R = [0, 3] \times [0, 7]$ , wobei allgemein  $A = \int_R 1 dA$  gilt.

Berechnen Sie weiters das Integral  $\int_R 5x^2 y^3 dA$

**Lösung.**  $A = 21, \int_R 5x^2 y^3 dA = \frac{108045}{4}$

4. **Beispiel 4.9.** Der Kreiszylinder  $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  bohrt aus der Kugel  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2\}$  einen Körper  $K = Z \cap B$  aus. Man berechne das Volumen von  $K$ .

**Lösung.**  $V_K = \left(\frac{8}{3} - \sqrt{3}\right)4\pi R^3$

5. **Beispiel 4.10.** Der Bereich  $B$  wird von dem Paraboloid  $z = x^2 + y^2$  und der Ebene  $z = 1$  begrenzt. Man berechne

$$I = \int_B \sqrt{x^2 + y^2} dV.$$

**Lösung.**  $I = \int_B \sqrt{x^2 + y^2} dV = \frac{4\pi}{15}$

6. **Beispiel 4.13.** Man berechne das Integral

$$I = \int_K e^{-z} dV,$$

mit  $K = \{(x, y, z) : z \geq x^2 + y^2\}$ .

**Lösung.**  $I = \pi$

7. **Beispiel 4.15.** Ein homogener Körper wird durch die Ungleichungen

$$0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq a^2(1 - z)^2$$

beschrieben. Man bestimme seinen Schwerpunkt.

**Lösung.**  $S = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$