

1. **Beispiel 4.5.** Man berechne das Volumensintegral

$$\int_K (x + y + z) \, dV,$$

wobei K der durch die Ungleichungen $x, y, z \geq 0$ und $x + y + z \leq 1$ bestimmte Körper ist.

Lösung. $I = \frac{1}{8}$

2. **Beispiel 4.6.** Man skizziere die durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $2y - x = 0$ und $x - y + z = 2$ begrenzte Pyramide, berechne ihr Volumen durch die Integration und zeige, dass $V = \frac{Gh}{3}$ ist, wobei G die Grundfläche und h die entsprechende Höhe ist.

Lösung. $V = \frac{4}{3}$

3. **Beispiel 4.12.** Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xa^3,$$

wobei $a > 0$, begrenzt wird.

Lösung. $V = \frac{a^3\pi}{3}$

4. **Beispiel 5.1.** Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y' = t(1 + y).$$

Lösung. $y(t) = C \exp(t^2 - 1)$

5. **DGL 1.Ord., Richtungsfeld, Lsg.** Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = -\frac{y}{x}$$

Skizzieren Sie das passende Richtungsfeld der gegebenen DGL und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Lösung. $y(x) = \frac{C}{x}$

6. **DGL 1.Ord. TdV, AWP, trig.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2x(t) \sin(t)$$

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 2$.

Lösung. $x(t) = \frac{2}{e^2} e^{2 \cos(t)}$

7. **DGL 1.Ord. TdV, trig/ln/exp, rat.** Geben Sie die Lösung $x = x(t)$ der folgenden Differentialgleichung an.

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{e^{2t}}{\sin(x(t))}$$

Lösung. $x(t) = \arccos\left(\frac{e^{2t}}{2}\right) + C$

8. **Beispiel 5.4.** Man bestimme die allgemeine Lösung $y(x)$ der DGL

$$y' = e^{-y}.$$

mittels Separation der Variablen. Wie lautet die konkrete Lösung unter der Zusatzbedingung $y(0) = a$? Gibt es eine Lösung für alle $a \in \mathbb{R}$, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Lösung definiert?

Lösung. $y(x) = \ln(x + C), \dots$