Praktische Mathematik 1 für TPH **Übungsblatt 6** 19.11.2019

1. **DGL 1. Ord., PBZ.** Seien $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $y = y(t)$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = a(1-y)y,$$

mit Hilfe der Methode des Trennens der Variablen.
Lösung. $y(t) = \frac{\mathrm{e}^{at}}{c+\mathrm{e}^{at}}$

2. **Diffgl Ord 2 Ansatzmethode Part.** Berechnen Sie mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = 5\mathrm{e}^t.$$

Lösung. $C = \frac{5}{3},\ y_p(t) = \frac{5}{3}t\mathrm{e}^t$

3. **Beispiel 5.3.** Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \cos t, \qquad u(0) = \dot{u}(0) = \tfrac{11}{10}.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Lösung, d.h. skizzieren Sie die Lösung und bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Für die Partikulärlösung verwende man den Ansatz $u_p(t) = A\cos(t+\alpha)$.
Lösung. $u(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} + \frac{\sqrt{2}}{10}\cos\left(t + \frac{7\pi}{4}\right)$

4. **Beispiel 5.12.** Lösen Sie das Randwertproblem

$$u'' - u = 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

Lösung. $u(x) = \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2-x} - 1 - \mathrm{e}^2\right) / \left(1 + \mathrm{e}^2\right)$

5. **Beispiel 5.13.** Untersuchen Sie das Randwertproblem

$$u'' + u = 0, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Ist die Lösung eindeutig, wieviele Lösungen existieren? **Lösung.** Nein, es existieren unendlich viele Lösungen.

6. **Beispiel 5.14.** Angenommen, der Wurf eines Steines senkrecht nach oben kann vollständig beschrieben werden durch die Angabe der konstanten Gravitationsbeschleuninung g und durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0. Was kann mit Hilfe der Dimensionsanalyse über die Höhe h des Wurfs und über die Zeit T, bis der Stein wieder auf den Boden fällt, ausgesagt werden? Wie ändert sich die Aussage, wenn zusätzlich noch Reibungseffekte und die Masse ded Steines berücksichtigt werden?
Lösung. reibungsfrei ist $h = \frac{v_0^2}{2g}$, $T = \frac{v_0}{g}$

7. **Fourierreihe 1.** Die Funktion $f(x) = |x-\pi|$, für $x \in [0, 2\pi]$, wird für $x \in \mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourierreihe $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, insbesondere die Fourierkoeffizienten a_0, a_6, b_4
Lösung. $a_0 = \pi,\ a_6 = 0,\ b_4 = 0$

8. **Fourierreihe 2.** Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 4x$ auf $[pi, \pi]$, die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird. Die Funktion lässt sich durch eine klassische Fourierreihe $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ darstellen.
Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k, mit $k \in \mathbb{N}$.
Lösung. $a_0 = 0,\ a_k = 0,\ b_k = -8\frac{(-1)^k}{k}$