1. **Integral.** Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int 2x\cos(x^2+5)\mathrm{d}x.$$

Lösung: $\sin(x^2+5)+C$

2. **Taylorpolynom.** Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = 6\ln(\cos(2x)).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3.Grades der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Lösung. $T_3(x) = -12x^2$

3. **Komplexe Exponentialfunktion.** Sei u gegeben durch

$$u = \left(-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3.$$

(a) Berechnen Sie $\exp(u)$ in kartesischen Koordinaten.

(b) Berechnen Sie $|\exp(u)|$.

(c) Berechnen Sie das Argument $\arg(\exp(u))$.

Lösung. $\exp(u) = \mathrm{e}^{64}$, $|\exp(u)| = \mathrm{e}^{64}$, $\arg(\exp(u)) = 0$

4. **Linearisierung DGL.** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' = t\mathrm{e}^y,$$

mit $y = y(t)$.

(a) Verwenden Sie das Taylor-Polynom

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \ldots$$

und geben Sie zwei lösbare Approximationen der Differentialgleichung an. Berechnen Sie die Lösung dieser Differentialgleichungen jeweils für $y(0) = 0$.

(b) Lösen Sie die originale Differentialgleichung mit der Methode des Trennens der Variablen und vergleichen Sie die Lösung mit jenen aus (a).

(c) Vergleichen Sie die Lösungen qualitativ, indem Sie diese Funktionen für $t \in [0,2]$ skizzieren.

Lösung. $y_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y_2(t) = \exp(\frac{1}{2}t^2) - 1$, $y(t) = -\ln|1-\frac{1}{2}t^2|$

5. **Linearisierte Pendelgleichung.** Lösen Sie die linearisierte Pendelgleichung für

$$\varphi(0) = \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \varphi'(0) = 1.$$

Lösung. $\varphi(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \varphi_0\cos(\omega t)$

6. **part Ableiten, totales Diff, PDE** Gegeben ist die Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $w(x,y) = \ln(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y)$. Bilden Sie das totale Differential der Funktion w. Bestimmen Sie weiters welche der folgenden Aussagen auf die Funktion w zutrifft.

   (a) $\frac{2}{5}\frac{x}{y}\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (b) $2x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (c) $2x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (d) $\frac{2}{5}x\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   Lösung. (d)

7. **Separationsansatz.** Betrachten Sie für $u = u(x,t)$ die (lineare) partielle Differentialgleichung (1. Ordnung) der Form

$$xu_x = u_t,$$

   mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(x,0) = x + 2x^3$.

   Lösung. $u(x,t) = x\mathrm{e}^t + 2x^3\mathrm{e}^{3t}$

8. **Wellengleichung.** Lösen Sie die Wellengleichung

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

   für $x \in [0,5]$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$u(0,t) = u(5,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 5\sin(\pi x).$$

   Lösung. $u(x,t) = \frac{5}{2\pi}\sin(\pi x)\sin(2\pi t)$

9. **Laplace–Operator.** Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi = \Phi(x,y,z)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi$$

   gilt. Berechnen Sie $\nabla\Phi$, sowie $\Delta\Phi$ für $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x,y,z) = |\boldsymbol{r}| + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$.

   Lösung. $\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} + 2\boldsymbol{r}$, $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{3}{|\boldsymbol{r}|^2} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$