1. **Integral.** Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, das Integral
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$
mit Hilfe einer hyperbolischen Substitution.
Lösung: $\frac{a^3}{3}\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}(\frac{x}{a}-2)+C, C\in\mathbb{R}$

2. **ODE 1.Ordnung.** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = (6x(t)+4)(t^3+t^2-2t).$$
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $x(0)=5$.
Lösung. $x(t) = \frac{-2}{3} + \frac{17}{3}\exp\left(\frac{1}{2}t^2(3t^2+4t-12)\right)$

3. **ODE 2. Ordnung.** Gegeben ist die folgende Differentialgleichung
$$y''(t) - 7y'(t) + 12y(t) = 8\mathrm{e}^{3t}.$$
   (a) Bestimmen Sie die reelle Partikulärlösung $y_p(t)$ der Differentialgleichung.
   (b) Bestimmen Sie die reelle Lösung $y(t)$ für das Anfangswertproblem mit Anfangswerten $y(0)=2, y'(0)=5$.

   Lösung. (a) $y_p(t) = -8t\mathrm{e}^{3t}$, (b) $y(t) = 7\mathrm{e}^{4t} - 5\mathrm{e}^{3t} - 8t\mathrm{e}^{3t}$

4. **Exakte DGL.** Gegeben ist die folgende Differentialgleichung
$$2x + 4y + 2 + (4x + 12y + 8)y' = 0.$$
   (a) Prüfen Sie, ob diese exakt ist.
   (b) Berechnen Sie ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.
   (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $y(0) = -1$.

   Lösung. $\Phi(x,y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + c_0$, $y(x) = -\frac{x+2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{4x-2x^2+4}$

5. **Beispiel 5.6.** Betrachten Sie die Differentialgleichung
$$y(1+xy) - xy' = 0.$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.
   (b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(y)$.
   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.
   (d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x,y)$.
   (e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung durch den Punkt $(x,y) = (2,-2)$.

   Lösung. $\Phi(2,-2) = \frac{2x}{C-x^2}$; $C = 2$

6. **Exakte DGL, integrierender Faktor.** Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(xy^2 + yx\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (2x^2y + x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

   (b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(x)$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.

   (d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x, y)$.

   Lösung. $\Phi(x, y) = y^2x + y\mathrm{e}^x + C_0$