1. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ eines Punktes entlang einer Kurve $C = \{\mathbf{r}(t)\colon t \geq 0\}$ ist gegeben durch den Vektor

$$\mathbf{v}(t) := \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \\ 3t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}(t)$ und den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, wenn $\mathbf{r}(0) = (0,0,0)^T$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den der Punkt entlang der Bahnkurve vom Zeitpunkt $t_1 = 0$ bis $t_2 = 10$ zurücklegt.

Lösung. (a) $\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (b) $s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)|dt \approx 150{,}77$

2. Gegeben ist das Skalarfeld $\mathbf{F} := \nabla\Phi$ eines Potentials

$$\Phi(x,y,z) := \frac{\cos(yz)}{yz} + \frac{1}{2x} + \sin(x)\cos(x).$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{F}$.

(b) Gegeben sind die folgenden Punkte

$$\mathbf{A} := (\tfrac{\pi}{2}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}), \quad \mathbf{B} := (\tfrac{3\pi}{4}, \pi, \tfrac{3}{2}), \quad \mathbf{C} := (\tfrac{5\pi}{4}, 3\pi, 1), \quad \mathbf{D} := (\tfrac{3\pi}{2}, 4\pi, \tfrac{1}{2}).$$

Berechnen Sie die am Kraftfeld verrichtete Arbeit $W := \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, wobei γ den Streckenzug **ABCD** darstellt.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung des Potentials Φ in Richtung des Vektors $\mathbf{v} := (0,0,-\pi)$ am Punkt $\mathbf{D}$.

Lösung. (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x^2} + \cos^2 x - \sin^2 x \\ -\frac{\sin(yz)}{y} - \frac{\cos(yz)}{y^2 z} \\ -\frac{\sin(yz)}{z} - \frac{\cos(yz)}{yz^2} \end{pmatrix}$, (b) $W = \frac{5}{6\pi}$, (c) $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{D}) = \frac{1}{\pi}$

3. Ein Punkt bewegt sich entlang der Kurve $C = \{\mathbf{r}(t)\colon 0 \leq t \leq 3\}$. Gegeben sind seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und seine Position zum Zeitpunkt $t = 2$ als

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ entlang derer sich der Punkt bewegt.

(b) Berechnen Sie die Länge des Weges L, den der Punkt entlang der Bahnkurve vom Zeitpunkt $t = 0$ bis $t = 3$ zurücklegt.

Lösung. (a) $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sqrt{2} \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{pmatrix}$, (b) $L = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$

4. Gegeben ist das folgende Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ mit

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x, y, z) = 30xyz - 40x^2 + 20yz - 20\mathrm{e}^{\sin(y)}.$$

   (a) Berechnen Sie das Kraftfeld.

   (b) Gegeben ist die Kurve C, welche durch die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t)^2 + \sin(t)\cos(t) \\ t - \sin(t)^2 e^{\cos(t)} \\ 3 - 2\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad 0 \le t \le \pi$$

   gegeben ist. Berechnen Sie die Arbeit $W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

   (c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von Φ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a} = (-4, 2, 4)$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (2, \pi, 1)$.

Lösung. (a) $\boldsymbol{F}() = \begin{pmatrix} 30yz - 80x \\ 30xz + 20z - 20e^{\sin(y)}\cos(y) \\ 30xy + 20y \end{pmatrix}$, (b) $W = 550$,
(c) $\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{\boldsymbol{a}}}(2, \pi, 1) = \frac{200\pi+840}{6}$

5. Betrachten Sie das Integral

$$I_z := \iiint\limits_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)\mathrm{d}V,$$

   das dem Trägheitsmoment einer Rotation um die z-Achse entspricht und $\rho(x, y, z) := 3z$ gegeben ist. Das Volumen V entspricht dem von der Ebene $z = 1$ und dem Rotationsparaboloid $x^2 + y^2 = -z + 5$ begrenzten Raum.

   (a) Schreiben Sie dieses Integral in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an und geben Sie die Integrationsgrenzen an.

   (b) Berechnen Sie nun das Trägheitsmoment I_z.

   (c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$I = \int_B \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

   wobei $B := \big\{(x, y) \,|\, x > 0,\ x^2 + y^2 > 1\big\}$.
   Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten und skizzieren Sie B.

Lösung. (a) $I_z = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_1^{5-r^2} f(r, \varphi, z)\mathrm{d}(r, \varphi, z)$, (b) $I_z = 64\pi$, (c) $I = \frac{2}{\mathrm{e}}$

6. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y) := \begin{pmatrix} y^2\cos(xy - \pi) \\ \sin(xy - \pi) + xy\cos(xy - \pi) + 2(y - \pi) \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen die Arbeit über das Kurvenintegral

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   wobei C_1 die Strecke zwischen den Punkten $\mathbf{A} := (1, \pi)$ und $\mathbf{B} := (1, 4\pi)$ ist.

(b) Betrachten Sie weiters eine Kurve C_2, gegeben durch die Paramterisierung

$$\mathbf{r_2}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \pi \cos t + \frac{3}{2}t \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um von $\mathbf{r_2}(0)$ nach $\mathbf{r_2}(2\pi)$ zu gelangen?

Lösung. (a) $W = 9\pi^2$, (b) $W = 9\pi^2$, *Bemerkung:* Warum sind die Lösungen gleich?

7. Die Geschwindigkeit eines Teilchens wird durch den Bahnvektor $\mathbf{v}(t)$ beschrieben und es ist der Ort des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\mathbf{v}(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} \\ -\frac{1}{4\pi} \sin \frac{t}{4\pi} \\ \frac{1}{4\pi} \cos \frac{t}{4\pi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ des Teilchens.

(b) Für große Werte von t gilt $v_x(t) \approx 0$ und $r_x(t)$ ist (fast) konstant. Berechnen Sie mit dieser Approximation den zurückgelegten Weg zwischen $t_1 := 10^5$ und $t_2 := 10^5 + 4$.

(c) Zum Zeitpunkt $t_0 := 4\pi^2$ soll sich nun die Geschwindigkeit des Teilchens nicht mehr ändern. Das heißt, das Teilchen bewegt sich geradlinig gleichförmig weiter. Berechnen Sie die Bahnkurve für diesen Fall.

Lösung. (a) $\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + te^{-t} \\ -(\frac{1}{4\pi})^2 \cos(\frac{t}{4\pi}) \\ -(\frac{1}{4\pi})^2 \sin(\frac{t}{4\pi}) \end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{\pi}$,

(c) $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 4\pi^2 e^{-4\pi^2} + 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t - 4\pi^2) \begin{pmatrix} e^{-4\pi^2} - 4\pi^2 e^{-4\pi^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4\pi} \end{pmatrix}$

8. Eine Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Tangente $t(x) = kx + d$ an die Kurve γ für $t_0 = \frac{1}{3}\pi$ und geben Sie die Parameter k und d an.

(b) Berechnen Sie einen Parameter t, sodass die Steigung der Tangete $k = -1$ beträgt.

(c) Berechnen Sie das Differential der Bogenlänge.

Lösung. (a) $k = \sqrt{3},\ d = 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$, (b) $t = -\frac{\pi}{2}$, (c) $\mathrm{d}s = \sqrt{2 - 2\cos(t)}\mathrm{d}t$

9. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 3x \cos(y) - 5y \cos(x).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f von f.

(b) Berechnen Sie die Tangentialebene $t(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

Lösung. (a) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3\cos(y) + 5y \sin(x) \\ -3x \sin(y) - 5\cos(x) \end{pmatrix}$, (b) $t(x, y) = -5y$