1. **Aufgabe 6.12.** Poisson-Verteilung: Ein Präparat bestehe aus 10^{20} Atomkernen, von denen jeder eine Zerfallswahrscheinlichkeit von $p = 4 \cdot 10^{-18}$ im Verlauf einer Stunde hat.

   (a) Geben Sie den Erwartungswert der Verteilung an. Dieser beschreibt, wie viele Kerne im Mittel in der ersten Stunde zerfallen.

   (b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Verteilung. Diese definiert das Intervall, in dem das Ergebnis von Aufgabe (a) mit einer statistischen Sicherheit von 68.3% liegt.

   Lösung. (a) $\lambda = 400$, (b) $\sigma = 20$

2. **Aufgabe 6.13.** Die Sonnenscheindauer $[h]$ an Sommertagen wird als normalverteilt mit den Parametern $\mu = 6.4[h]$ und $\sigma^2 = 10.24$ betrachtet. Falls die Sonnenscheindauer den Wert μ um mehr als $d \cdot 100\%$ übersteigt, wird von einer Mess-Station am Ende des Tages eine Meldung ausgegeben.

   (a) Sei $d = 0.625$. An wieviel Prozent der Sommertage wird eine solche Meldung ausgegeben?

   (b) Wie groß muss man d wählen, damit nur an 5 Prozent der Sommertage eine Meldung ausgegeben wird? Ab welcher Sonnenscheindauer wird dann also Meldung gemacht?

   Lösung. (a) $P(X > \mu + d \cdot \mu) \approx 0.1056$, (b) $d = 0.8225$

3. **Aufgabe 6.14.** Der Ausfallzeitpunkt von Halbleiter-Bauelementen folgt einer Exponentialverteilung. Betrachtet wird das Verhalten von 20000 Bauelementen im Laufe der Zeit. Im ersten Jahr fallen 2000 Bauelemente aus.

   (a) Den Ausfall wie vieler Bauelemente erwarten Sie im Laufe des zweiten und im Laufe des dritten Jahres?

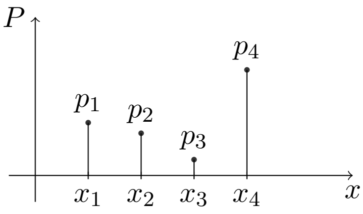
   (b) Wie viele funktionierende Bauelemente erwarten Sie nach 10 Jahren?

   (c) Wie groß ist die mittlere überlebensdauer der Bauelemente? Wie viele Bauelemente funktionieren noch nach dieser Zeit?

   (d) Nach welcher Zeit ist die Hälfte aller Bauelemente kaputt?

   Lösung. (a) $N \approx 1620$, (b) $N(t = 10) \approx 6974$, (c) $E(X) \approx 9.49$,
   $N(t = 9.49) \approx 7358$, (d) $x \approx 6.5788$

4. **Diskrete Zufallsvariable.** Betrachten Sie die Funktion P in der Abbildung



mit $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{5}$, $p_3 = c$, $p_4 = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie

(a) $c \in \mathbb{R}^+$, sodass P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt,

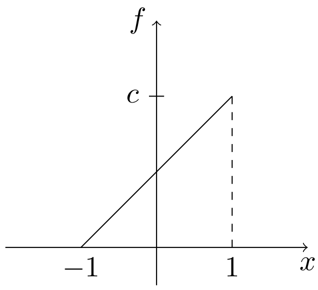
(b) geben Sie $F(x)$ an und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Berechnen Sie $P(X < x_2)$ sowie $P(X \leq x_2)$.

Lösung. (a) $c = \frac{1}{20}$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1, \\ \frac{1}{4} & x_1 \leq x < x_2, \\ \frac{9}{20} & x_2 \leq x < x_3,, \\ \frac{1}{2} & x_3 \leq x < x_2, \\ 1 & x \geq x_4 \end{cases}$

(c) $P(X < x_2) = \frac{1}{4}$, $P(X \leq x_2) = \frac{9}{20}$

5. **Stetige Zufallsvariable.** Sei X eine stetige Zufallsvariable und betrachten Sie die Funktion f dargestellt in der folgenden Abbildung.



(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, sodass f eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X an und fertigen Sie eine Skizze an.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(2X - 3)$.

(d) Berechnen Sie $P(0 \leq X < \frac{1}{2})$.

Lösung. (a) $c = 1$, (b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 1,, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

(c) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(2X - 3) = -\frac{7}{3}$, (d) $P(0 \leq X < \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

6. **Kovarianz und Korrelation.** Betrachten Sie eine kontinuierliche Zufallsvariable die auf $[a, b] = [-1, 1]$ gleichverteilt ist, d.h. die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$.

   (b) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X.

   (c) Betrachten Sie die Zufallsvariable $Y = X^2$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ und die Varianz $\mathbb{V}(Y)$.

   (d) Berechnen Sie die Kovarianz und Korrelation der Zufallsvariablen X und Y.

Lösung. (a) $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{3}$, (b) $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$, (c) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{V}(Y) = \frac{4}{45}$ (d)$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, $\rho(X, Y) = 0$