1. Lösen Sie die Differentialgleichung nach $y = y(t)$

$$y'' + 6y' + 9y = 2\mathrm{e}^{-3t}.$$

Lösung. $y(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{-3t} + t^2\mathrm{e}^{-3t}$

2. Zeigen Sie, dass $y_1(x) = \exp(x^2)$, für $x \in \mathbb{R}^+$, Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' - 2y = 0$$

ist. Bestimmen Sie ausgehend von y_1 eine weitere linear unabhängige Lösung y_2 dieser linearen Differentialgleichung

Bemerkung: Es tritt dabei ein Integral der Form $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ auf, dieses besitzt keine Stammfunktion und kann einfach in der Integraldarstellung belassen werden.

Lösung. $y_2(x) = \exp(x^2)\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$

3. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |x|$ auf $[-\pi, \pi]$, die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird, d.h. $f(x \pm 2\pi k) = f(x), k \in \mathbb{Z}$. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die Fourier-Reihe der periodisch fortgesetzten Funktion f.

Hinweis: Überprüfen Sie die Symmetrie von f und schließen Sie damit auf Koeffizienten gleich bzw. ungleich Null.

Lösung. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

4. Die Funktion $u(t, x) = \mathrm{e}^{2x} f(t)$ ist Lösung von

$$u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

Verifizieren Sie dies und berechnen Sie die reelle Funktion f so, dass $u(0, x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ und $u_t(0, x) = 0$ gilt.

Lösung. $f(t) = 2\cos(2t)$

5. Berechnen Sie die Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung

$$y' = 2t\mathrm{e}^{-y},$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. Berechnen Sie mit Hilfe des Taylor-Polynoms von e^x zwei mögliche Lösungen der linearisierten Differentialgleichung.

Lösung. $y(t) = \ln(1 + t^2)$, $\hat{y}_1(t) = t^2$, $\hat{y}_2(t) = -\mathrm{e}^{t^2} + 1$

6. Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{R}^+$ die Differentialgleichung

$$3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung exakt ist und berechnen Sie ein erstes Integral.

(b) Bestimmen Sie $y = y(x)$, wenn das zugehörige Potential $\Phi(0,0) = 0$ erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass $y = y(x)$ aus (b) die Differentialgleichung

$$9x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

erfüllt.

Lösung. (a) exakt, (b) $y(x) = \sqrt[3]{x}$, (c) erfüllt

7. Im Experiment des Werfens dreier Münzen, welche Kopf oder Zahl zeigen können, wird die Anzahl der Köpfe gezählt. Dabei stellt sich der Ereignisraum als $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ dar und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P(0) = \tfrac{1}{8}, \qquad P(1) = \tfrac{3}{8}, \qquad P(2) = \tfrac{3}{8}, \qquad P(3) = \tfrac{1}{8}.$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Köpfe eines Wurfs

(i) weniger als 2 (Ereignis W),

(ii) maximal 2 (Ereignis H),

(iii) mindestens 2 (Ereignis M)

ist.

(b) Gegeben ist das Ereignis A, definiert als Anzahl der Köpfe eines Wurfs maximal 2, und das Ereignis B, definiert als Anzahl der Köpfe eines Wurfs mindestens 2. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(A|B)$.

(c) Es wird nun eine Zufallsvariable X definiert, welche die Anzahl der Köpfe eines Wurfs darstellt. Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X der Zufallsvariable.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus (a) mit Hilfe der Verteilungsfunktion aus (c) dar.

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}$ sowie die Varianz $\mathbb{V}$ der Zufallsvariablen X.

Lösung. (a) $P(W) = \frac{1}{2}$, $P(H) = \frac{7}{8}$, $P(M) = \frac{1}{2}$, (b) $P(A|B) = \frac{6}{8}$
(c) $F_X(x) = P(X \leq x)$ (d) $P(X < 2) = F_X(1)$, $P(X \leq 2) = F_X(2)$,
$P(X \geq 2) = 1 - F_X(1)$, (e) $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}$