1. Gegeben Sei eine Kurve

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -2+5t \\ 2+3t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\},$$

ein Skalarfeld

$$f(x,y) = x\cos y + x^2 + \cos y,$$

sowie das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y + 2x \\ -x\sin y + \mathrm{e}^y \sin y + \mathrm{e}^y \cos y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Tangetialebene $z = T(x,y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 5\pi)$.

(b) Untersuchen Sie, ob $\boldsymbol{F}$ ein Potential besitzt und of f ein solches darstellt.

(c) Bestimmen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{F}$.

(d) Berechnen Sie

$$\int_C \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(e) Berechnen Sie

$$\int_C f\ \mathrm{d}s.$$

Lösung.

(a)

$$T(x,y) = f(x,y) + \boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(y) + 2x \\ -x\sin(y) - \sin(y) \end{pmatrix}$$

Ausgewertet an $(x_0, y_0) = (2, 5\pi)$ erhält man:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \cos(5\pi) + 4 \\ -2\sin(5\pi) - \sin(5\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_0,y_0) = 2 \cdot \cos(5\pi) + 4 + \cos(5\pi) = -2 + 4 - 1 = 1$$

Damit erhält man

$$T(x,y) = 1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y - 5\pi \end{pmatrix} = 1 + 3x - 6 = -5 + 3x$$

(b) Man setzt $\boldsymbol{F}$ in die Integrabilitätsbedingung ein:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\sin y; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\sin y \quad \checkmark$$

Die Bedingung ist daher erfüllt. Um zu überprüfen ob f ein Potential zu $\boldsymbol{F}$ ist muss gelten $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{pmatrix} \cos y + 2x \\ -x \sin y - \sin y \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{F}$$

Das Skalarfeld f ist daher kein Potential für $\boldsymbol{F}$.

(c) Das Potential Φ zu $\boldsymbol{F}$ erhält man durch Integrieren der Komponenten von $\boldsymbol{F}$ und anschließendem Vergleichen.

$$\Phi(x, y) = \int F_x \mathrm{d}x = x \cos y + x^2 + C(y) \tag{1}$$

$$\Phi(x, y) = \int F_y \mathrm{d}y = x \cos y + \int \mathrm{e}^y \sin y \mathrm{d}y + \int \mathrm{e}^y \cos y \mathrm{d}y$$

Die beiden Integrale werden durch partielle Integration gelöst, wobei nur das erste wirklich durchgeführt werden muss.

$$\int \mathrm{e}^y \sin y \mathrm{d}y = \mathrm{e}^y \sin y - \int \mathrm{e}^y \cos y \mathrm{d}y + D(x)$$

Setzt man dies oben ein erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= x \cos y + \mathrm{e}^y \sin y - \int \mathrm{e}^y \cos y \mathrm{d}y + \int \mathrm{e}^y \cos y \mathrm{d}y + D(x) \\ &= x \cos y + \mathrm{e}^y \sin y + D(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Vergleicht man (1) mit (2) so erhält man:

$$\Phi(x, y) = x \cos y + x^2 + \mathrm{e}^y \sin y + c; \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

(d) Für $\int_C \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ benutzt man das Potential Φ.

$$\Phi(t) = (-2 + 5t) \cos(2 + 3t) + (-2 + 5t)^2 + \mathrm{e}^{(2+3t)} \sin(2 + 3t)$$

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= 3 \cos 5 + 9 + \mathrm{e}^5 \sin 5 - (-2 \cos 2 + 4 + \mathrm{e}^2 \sin 2) \\ &= 5 + 3 \cos 5 + \mathrm{e}^5 \sin 5 + 2 \cos 2 - \mathrm{e}^2 \sin 2 \end{aligned}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\int_C f\,\mathrm{d}s &= \int_C f(\boldsymbol{r}(t))\,|\dot{\boldsymbol{r}}|\ \mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\sqrt{5^2+3^2}}_{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\int_0^1 \underbrace{(-2+5t)\cos(2+3t)+(-2+5t)^2+\cos(2+3t)}_{f(\boldsymbol{r}(t))}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{34}\left[-2\int_0^1 \cos(2+3t)\mathrm{d}t + 5\int_0^1 t\cos(2+3t)\mathrm{d}t\right. \\
&\qquad \left. + \int_0^1 4-20t+25t^2\mathrm{d}t + \int_0^1 \cos(2+3t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \sqrt{34}\left[-\frac{1}{3}\sin(2+3t)\Big|_0^1 + 5\underbrace{\int_0^1 t\cos(2+3t)\mathrm{d}t}_{I} + (4t-10t^2+\frac{25}{3}t^3)\Big|_0^1\right]
\end{aligned}
$$

I wird mittels partieller Integration gelöst:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}t\sin(2+3t)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \sin(2+3t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\sin(5) + \frac{1}{9}\cos(2+3t)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\sin(5) + \frac{1}{9}\cos(5) - \frac{1}{9}\cos(2)
\end{aligned}
$$

Wieder eingesetzt erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int_C f\,\mathrm{d}s &= \sqrt{34}\left[-\frac{1}{3}\sin(5)+\frac{1}{3}\sin(2)+\frac{5}{3}\sin(5)+\frac{5}{9}\cos(5)-\frac{5}{9}\cos(2)+4-10+\frac{25}{3}\right] \\
&= \sqrt{34}\left[\frac{4}{3}\sin(5)+\frac{1}{3}\sin(2)+\frac{5}{9}\cos(5)-\frac{5}{9}\cos(2)+\frac{7}{3}\right]
\end{aligned}
$$

2. Gegeben Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z) = -4x^2+6xy-4y^2-4z^2.$$

Es bezeichnet $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ jenen Körper, der durch die Ebenen $x=0$, $y=0$ und $z=0$ sowie durch $3x+5y+2z=6$ beschränkt sind. Weiters bezeichnet $B_2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Halbkugel mit Mittelpunkt $M=(0,0,0)$ und dem Radius $r=3$, für welche $z \geq 0$ gilt.

(a) Skizzieren Sie die beiden Körper B_1 und B_2.

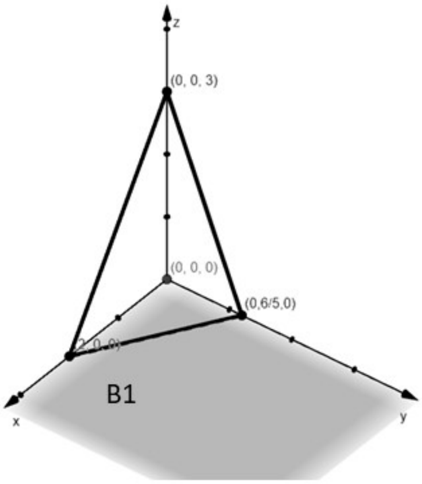
(b) Berechnen Sie das folgende Integral über den Körper B_1.

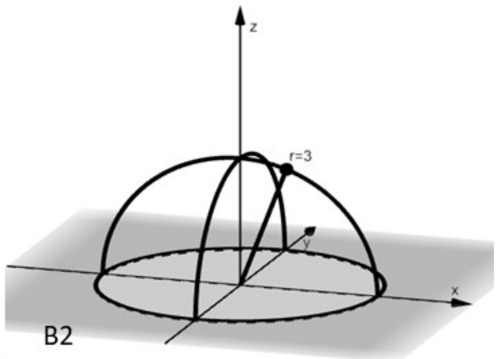
$$\int_{B_1} 1\mathrm{d}V$$

(c) Berechnen Sie das folgende Integral über den Körper B_2.

$$\int_{B_2} f\mathrm{d}V$$

Lösung.





(a)

(b) Für B_1 lauten die Grenzen $\left\{0 < z < 3;\ 0 < y < \frac{6}{5} - \frac{2}{5}z;\ 0 < x < 2 - \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}z\right\}$

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} 1 \mathrm{d}V &= \int_{z=0}^{3} \int_{y=0}^{\frac{6}{5}-\frac{2}{5}z} \int_{x=0}^{2-\frac{5}{3}y-\frac{2}{3}z} 1 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \int_{z=0}^{3} \int_{y=0}^{\frac{6}{5}-\frac{2}{5}z} \left(2 - \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}z\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \int_{z=0}^{3} 2y - \frac{5}{6}y^2 - \frac{2}{3}yz \Big|_0^{\frac{6}{5}-\frac{2}{5}z} \mathrm{d}z \\
&= \int_{z=0}^{3} \frac{12}{5} - \frac{4}{5}z - \frac{6}{5} + \frac{4}{5}z - \frac{2}{15}z^2 - \frac{4}{5}z + \frac{4}{15}z^2 \, \mathrm{d}z \\
&= \frac{6}{5}z - \frac{2}{5}z^2 + \frac{2}{45}z^3 \Big|_0^3 \\
&= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

(c) Hier bietet sich die Verwendung von Kugelkoordinaten mit den entsprechenden Grenzen $\left\{0 < r < 3,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\}$ an:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos\varphi \sin\vartheta \\
y &= r \sin\varphi \sin\vartheta \\
z &= r \cos\vartheta
\end{aligned}$$

Und daher für $f(r, \varphi, \vartheta)$

$$\begin{aligned}
f(r, \varphi, \vartheta) &= -4r^2 \left(\underbrace{\cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}_{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1} + \cos^2\vartheta\right) + 6r^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\vartheta \\
&= -4r^2 \left(\underbrace{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}_{=1}\right) + 6r^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\vartheta \\
&= -4r^2 + 6r^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\vartheta
\end{aligned}$$

Weiters lautet die Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = r^2 \sin\vartheta$$

Eingesetzt liefert dies das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{B_2} f \mathrm{d}V &= \int_{r=0}^{3} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -4r^4 \sin\vartheta + 6r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{3} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} -8\pi r^4 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r + \int_{r=0}^{3} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} 6r^4 \sin^3\vartheta \underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi\right)}_{=0} \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{3} 8\pi r^4 \cos\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r \\
&= (-1) \cdot \frac{8}{5}\pi r^5 \Big|_0^3 = -\frac{8 \cdot 3^5}{5}\pi = -\frac{1944}{5}\pi
\end{aligned}$$

3. Betrachten Sie für das Beispiel mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t).$$

(a) Seien $a_2 = a_0 = 0$, $n = 3$ und $f(t) = 5\exp(2t)$. Berechnen Sie mit der Methode Trennung der Variablen die Lösung y des Anfangswertproblems

$$3(\dot{y})^3 = 5\exp(2t) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1.$$

(b) Seien $a_2 = a_0 = 0$, $n = 3$ und $f(t) = 5\exp(2t)$. Die Differentialgleichung lautet wie in (a) demnach $3(\dot{y})^3 = 5\exp(2t)$. Berechnen Sie die Tangete $y = T(t)$ an die Lösung der Differentialgleichung $y(t)$ im Punkt $(t_0, y_0) = (0, 1)$ und skizzieren Sie diese in der (t, y)-Ebene.

(c) Seien insbesondere $a_2 = 1$ und $n = 1$. Die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 2\exp(-2t).$$

Berechnen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ und eine Partikulärlösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung.

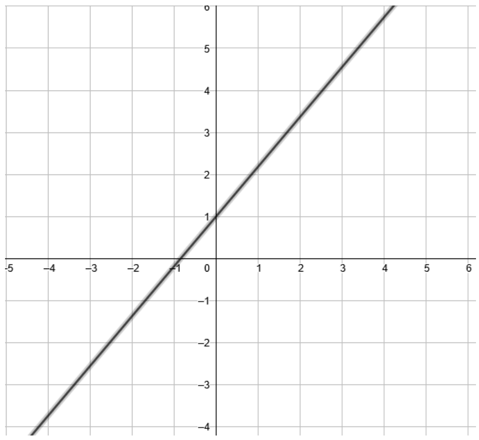
Lösung.

(a) Lösung der Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^3 &= 5\exp(2t)\\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^3 &= \left(\frac{5}{3}\right)\exp(2t)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \left(\left(\frac{5}{3}\right)\exp(2t)\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\exp\left(\frac{2t}{3}\right)\\
\int \mathrm{d}y &= \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\int \exp\left(\frac{2t}{3}\right)\mathrm{d}t\\
\Rightarrow y\left(t\right) &= \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)\exp\left(\frac{2t}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
y(0) = 1 \Rightarrow C + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{3}} &= 1\\
C &= 1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\\
y(t) &= 1 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\exp\left(\frac{2t}{3}\right)
\end{aligned}$$



(b) Die Tangente ist gegeben über

$$\begin{aligned}T(t) &= y_0 + \dot{y}(0)(t - t_0)\\ &= 1 + \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\exp(0) \cdot (t - 0) = 1 + t\sqrt[3]{\frac{5}{3}}.\end{aligned}$$

(c) Lösung der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned}&\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0\\ &\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9} \Rightarrow \lambda_1 = 4; \quad \lambda_2 = -2\\ &\text{Fundamentalsystem:} \quad \{y_1(t), y_2(t)\} = \left\{\mathrm{e}^{4t},\, \mathrm{e}^{-2t}\right\}\end{aligned}$$

Die Partikulärlösung erhält man über den Ansatz $y_p(t) = At\mathrm{e}^{-2t}$ da äußere Resonanz vorliegt.

$$\begin{aligned}y_p(t) &= At\mathrm{e}^{-2t}\\ \dot{y}_p(t) &= -2At\mathrm{e}^{-2t} + A\mathrm{e}^{-2t}\\ \ddot{y}_p(t) &= 4At\mathrm{e}^{-2t} - 4A\mathrm{e}^{-2t}\end{aligned}$$

Diesen setzt man in die DGL ein.

$$\begin{aligned}4At\mathrm{e}^{-2t} - 4A\mathrm{e}^{-2t} + 4At\mathrm{e}^{-2t} - 2A\mathrm{e}^{-2t} - 8At\mathrm{e}^{-2t} &= 2\mathrm{e}^{-2t}\\ -6A = 2 \Rightarrow A &= -\frac{1}{3}\\ y_p(t) &= -\frac{1}{3}t\mathrm{e}^{-2t}\end{aligned}$$