1. Gegeben sei für $x = x(t)$ die Eulersche Differentialgleichung

$$t^2x'' - 10tx' + 28x = 4.$$

   (a) Berechnen Sie zunächst das Fundamentalsystem $\{x_1(t), x_2(t)\}$.

   (b) Berechnen Sie eine Partikulärlösung x_p der inhomogenen Differentialgleichung.

   (c) Geben Sie nun die Lösung x der Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$ an.

Lösung.

(a) Wir machen einen Ansatz für die homogene Lösung, $x(t) = t^\alpha$, also ist $x'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ und $x'' = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$. Nach dem Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - 10t\alpha t^{\alpha-1} + 28t^\alpha &= 0, \\ \alpha(\alpha-1)t^\alpha - 10\alpha t^\alpha + 28t^\alpha &= 0, \\ \alpha^2 - \alpha - 10\alpha + 28 &= 0, \\ \alpha^2 - 11\alpha + 28 &= 0, \\ \alpha_{1,2} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} &= \frac{11 \pm 3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha_1 = 7$ und $\alpha_2 = 4$. Die homogene Lösung ist damit gegeben durch

$$x_h(t) = c_1t^7 + c_2t^4.$$

(b) Für die partikuläre Lösung verwenden wir Variation der Konstanten, und setzen

$$\begin{aligned} &x_p(t) = c_1(t)t^7 + c_2(t)t^4 \\ &x_p'(t) = c_1'(t)t^7 + 7c_1(t)t^6 + c_2'(t)t^4 + 4c_2(t)t^3, \quad \text{mit} \quad c_1'(t)t^7 + c_2'(t)t^4 = 0, \\ &x_p''(t) = 42t^5c_1^{(}t) + 7t^6c_1'(t) + 12t^2c_2(t) + 4t^3c_2'(t). \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 7t^8c_1'(t) + 4t^5c_2'(t) &= 4, \\ c_1'(t)t^7 + c_2'(t)t^4 &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem Lösen des Gleichungssystems und der Integration erhalten wir $c_1(t) = -\frac{4}{21}t^{-7}$ und $c_2(t) = \frac{1}{3}t^{-4}$, und damit ist $x_p(t) = \frac{1}{7}$.

(c) Die Anfangsbedingungen setzen wir in die allgemeine Lösung $x(t) = c_1t^7 + c_2t^4 + \frac{1}{7}$, bzw $x'(t) = 7c_1t^6 + 4c_2t^3$, und erhalten $c_1 = \frac{4}{21}$ und $c_2 = -\frac{1}{3}$.

2. Gegeben sei für $x = x(t)$ die folgende Differentialgleichung

$$3x + 2\mathrm{e}^{2t} + (3t + 2\cos(2x))\dot{x} = 0.$$

(a) Überprüfen Sie, ob es sich dabei um eine exakte Differentialgleichung handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls ein erstes Integral $\Phi(x, t)$.

(b) Gegeben sei für $u = u(x, t)$ die folgende partielle Differentialgleichung

$$xu_x = 2u_t.$$

Lösen Sie die Gleichung mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = 3x^3 + 3x$ unter Verwendung des Separationsansatz.

Lösung.

(a) Zuerst überprüfen wir, ob die Gleichung exakt ist, mit $p(x, t) = 3x + 2\mathrm{e}^{2t}$ and $q(x, t) = 3t + 2\cos(2x)$. Nach dem Ableiten erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 3, \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 3.$$

Nachdem wir gezeigt haben, dass es um eine exakte Differentialgleichung handelt, können wir das erste Integral berechnen.

$$\begin{aligned}
\Phi(x, t) = \int 3x + 2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t &= 3tx + \mathrm{e}^{2t} + C(x) \\
3t + C'(x) &= 3t + 2\cos(2x) \\
C(x) &= \int 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
C(x) &= \sin(2x)
\end{aligned}$$

Das erste Integral ist damit

$$\Phi(x, t) = 3xt + \mathrm{e}^{2t} + \sin(2x) + c_o.$$

(b) Diese Gleichung lösen wir mit dem Separationsansatz indem wir $u(x, t) = v(t)w(x)$ setzen. Wir brauchen zwei partielle Ableitungen, $u_x = v(t)w'(x)$ und $u_t = \dot{v}(t)w(x)$. Nach dem Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung, erhalten wir

$$\begin{aligned}
xv(t)w'(x) &= 2\dot{v}(t)w(x), \\
x\frac{w'(x)}{w(x)} &= 2\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Wir lösen zuerst die Gleichung für $w(x)$ mittels Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}
xw'(x) &= \kappa w(x) \\
\int \frac{1}{w}\mathrm{d}w &= \int \kappa \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln(w) &= \kappa \ln(x) + \tilde{c} \\
\ln(w) &= \ln(x^\kappa) + \tilde{c} \\
w(x) &= C_1 x^\kappa
\end{aligned}$$

Die Gleichung für $v(t)$ lösen wir auch mit Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} 2\dot{v}(t) &= \kappa v(t) \\ \int \frac{2}{v}\mathrm{d}v &= \int 2\kappa \,\mathrm{d}t \\ \ln(v) &= \frac{1}{2}\kappa t + \tilde{c} \\ v(t) &= C_2 \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}t} \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung $u(x,t) = C_1 x^\kappa C_2 \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}t} = C x^\kappa \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}t}$. Wir setzen jetzt die Anfangsbedingung $u(x,0) = 3x^3 + 3x$.

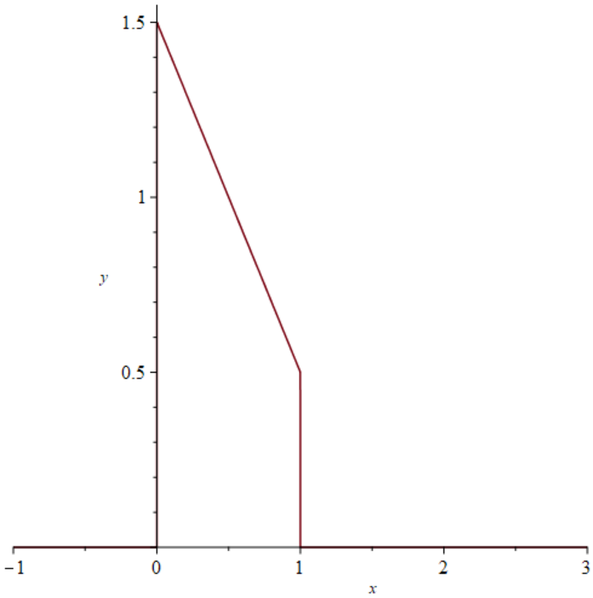
$$u(x,0) = C_1 x^{\kappa_1} + C_2 x^{\kappa_2} = 3x^3 + 3$$

$$C_1 = 3, \quad \kappa_1 = 3$$

$$C_2 = 3, \quad \kappa_2 = 1$$

Damit erhalten wir die Lösung $u(x,t) = 3x^3 \mathrm{e}^{\frac{3t}{2}} + 3x\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

3. Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$, gegeben durch die Skizze



(a) Zeigen Sie, dass $f_X(x)$ die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erfüllt und bestimmen Sie die zu $f_X(x)$ gehörige Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

(b) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \leq X \leq \frac{1}{3}\}$ und $B = \{\frac{1}{9} \leq X \leq 1\}$. Berechnen Sie $P(A)$ und $P(B)$.

(c) Berechnen Sie für die Ereignisse A und B aus (b) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$.

(d) Berechnen Sie für die Ereignisse A und B die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$.

Lösung.

(a) Aus der Skizze können wir die Dichtefunktion ablesen.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -x + \frac{3}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Um zu überprüfen, ob $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist, wird die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$ überprüft. Die Bedingung $f_X(x) \geq 0$ für alle x aus $\mathbb{R}$ ist erfüllt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -x + \frac{3}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist gegeben durch $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$. Also in unserem Fall

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

(b) Für die gegebene Ereignisse, nach dem Einsetzen, erhalten wir

$$P(A) = \int_0^{\frac{1}{3}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = F_X\left(\tfrac{1}{3}\right) - F_X(0) = F_X\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{4}{9},$$
$$P(B) = \int_{\frac{1}{9}}^{1} f_X(x)\,\mathrm{d}x = F_X(1) - F_X\left(\tfrac{1}{9}\right) = 1 - F_X\left(\tfrac{1}{9}\right) = 1 - \frac{13}{81} = \frac{68}{81}.$$

(c) Für die Berechnung von der bedingten Wahrscheinlichkeit brauchen wir $A \cap B = \{\frac{1}{9} \leq X \leq \frac{1}{3}\}$, also

$$P(A \cap B) = \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{3}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = F_X(\tfrac{1}{3}) - F_X(\tfrac{1}{9}) = \frac{4}{9} - \frac{13}{81}, \quad \text{und}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{F_X(\frac{1}{3}) - F_X(\frac{1}{9})}{1 - F_X(\frac{1}{9})} = \frac{\frac{4}{9} - \frac{13}{81}}{\frac{68}{81}} = \frac{23}{68}.$$

(d)

$$P(A \cup B) = P(\{0 \leq X \leq 1\}) = \int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$