1. Gegeben ist die Funktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $w(x,y) = \ln(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y)$. Bilden Sie das totale Differential der Funktion w. Bestimmen Sie weiters welche der folgenden Aussagen auf die Funktion w zutrifft und argumentieren Sie Ihre Entscheidung.

   (a) $\frac{2}{5}\frac{x}{y}\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (b) $2x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (c) $2x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   (d) $\frac{2}{5}x\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

   Lösung. $\mathrm{d}w = \frac{5}{5x-2y}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{5x-2y}\mathrm{d}y$

2. Betrachten Sie für $u = u(x,t)$ die (lineare) partielle Differentialgleichung (1. Ordnung) der Form
$$xu_x = u_t,$$
mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(x,0) = x + 2x^3$.

   Lösung. $u(x,t) = x\mathrm{e}^t + 2x^3\mathrm{e}^{3t}$

3. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung
$$t^2u_t + \frac{1}{x}u_x = u.$$
Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ für den Anfangswert $u(0,1) = 1$.

   Lösung. $u(x,t) = c\exp\left(\frac{1}{2}x^2(1-\ln(c)) - \frac{\ln(c)}{t})\right)$

4. Lösen Sie die Wellengleichung
$$u_{tt} = 4u_{xx}$$
für $x \in [0,5]$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Die Anfangs- und Randbedingungen lauten
$$u(0,t) = u(5,t) = 0, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 5\sin(\pi x).$$

   Lösung. $u(x,t) = \frac{5}{2\pi}\sin(\pi x)\sin(2\pi t)$

5. Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi = \Phi(x,y,z)$.

   (a) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass
$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi$$
gilt.

   (b) Sei $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x,y,z) = |\boldsymbol{r}| + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$. Berechnen Sie $\nabla\Phi$, sowie $\Delta\Phi$.

   Lösung. $\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} + 2\boldsymbol{r}$, $\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{3}{|\boldsymbol{r}|^2} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$

6. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$2x + 4y + 2 + (4x + 12y + 8)y' = 0.$$

   (a) Prüfen Sie, ob diese exakt ist.
   (b) Berechnen Sie ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.
   (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $y(0) = -1$.

   Lösung. $\Phi(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + c_0$, $y(t) = \frac{-2-x}{3} - \frac{\sqrt{-2x^2+4x+4}}{6}$

7. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y\cos(x) + 2x\mathrm{e}^y + (\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y - 1)y' = 0.$$

   Prüfen Sie zuerst, ob diese Gleichung exakt ist. Berechnen Sie danach ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.

   Lösung. $\Phi(x) = y\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y + c_0$