1. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$2x\mathrm{e}^y - 1 + (x^2\mathrm{e}^y + 1)y' = 0.$$

Prüfen Sie die Gleichung auf Exaktheit und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(1) = 0$.
Lösung. $x(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\left(1 + \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^y}\right)$

2. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ und $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$3x^2 - 2ax + ay - 3y^2y' + axy' = 0.$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist.
(b) Finden Sie ein Potential als erstes Integral.
(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ kann die Lösung $y = y(x)$ angegeben werden? Berechnen Sie diese.

Lösung. (a) exakt (b) $\Phi(x, y) = x^3 - ax^2 + axy + y^3$

3. Lösen Sie die Eulersche Differentialgleichung

$$4t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 2t^4,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(1) = 0$ und $\dot{x}(1) = 0$.
Lösung. $x(t) = \frac{8}{45}\sqrt[4]{t} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{45}t^4$

4. Betrachten Sie für $y = y(t)$ mit $t > 0$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \frac{3}{t}\dot{y} + \frac{y}{t^2} = \frac{\ln t}{t^2}.$$

Überprüfen Sie ob es sich um eine Euler-Differentialgleichung handelt und lösen Sie diese.
Lösung. $y(t) = c_1\frac{1}{t} + c_2\frac{1}{t}\ln t + \ln t - 2$

5. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bernoulli Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx = 2t^3x(t)^3.$$

Lösung. $y(t) = \frac{2}{\sqrt{2+4\exp(2t^2)C+4t^2}}$

6. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{x}\cos t + x\cos t = 1.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem $\{x_1(t), x_2(t)\}$ an.
(b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung $x_p(t)$.

Lösung. (a) $\{\cos t, \sin t\}$, (b) $\ln(\cos t)\cos t + t\sin t$