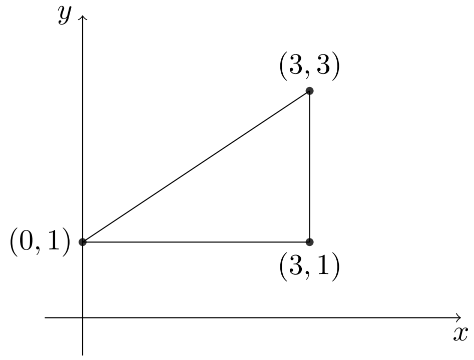
1. Der Bereich B ist gegeben durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1), (3,1)$ und $(3,3)$. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B 1\,\mathrm{d}F.$$

Lösung.



Die Integralgrenzen sind $x \in [0,3]$ und $y \in [1, \frac{2}{3}x+1]$. Damit kann man das Bereichsinteral berechnen.

$$\int_B 1\mathrm{d}F = \int_0^3 \int_1^{\frac{2}{3}x+1} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^2\Big|_0^3 = 3$$

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben und der Bereich B beschränkt durch $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 4\big\}$. Berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f\,\mathrm{d}V.$$

Lösung.

Für diese Berechnung verwenden wir Zylinderkoordinaten mit $0 \le r^2 \le z^2$, $0 \le z \le 4$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Determinante der Jacobi-Matrix ist $\det J = r$ und die Funktion $f(x,y,z)$ wird zu $f(r,\varphi,z) = z\,r$. Damit kann man das Bereichintegral berechnen.

$$\begin{aligned}\int_B f\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^z z\,r\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 z\frac{r^3}{3}\Big|_0^z \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\frac{z^5}{5}\Big|_0^4 \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{15}4^5\end{aligned}$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{y} = y\sin t$ und der Anfangswert $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Berechnen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Lösung.

Die Gleichung ist separabel und kann mit Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y\frac{1}{y} &= \sin t \ \mathrm{d}t \\ \int \frac{1}{y} \ \mathrm{d}y &= \int \sin t \ \mathrm{d}t \\ \ln|y| &= -\cos t + c^* \\ y &= C\mathrm{e}^{-\cos t} \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen des Anfangswerts erhalten wir $y(\frac{\pi}{2}) = C$ und damit $C = 2$. Die Gesamtlösung lautet

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-\cos t}.$$

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = f(t).$$

(a) Berechnen Sie das Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ eine partikuläre Lösung.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom für die homogene Gleichung lautet $\lambda^2 + 5\lambda + 6$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -2$. Das Fundamentalsystem lautet damit $\{\mathrm{e}^{-3t}, \mathrm{e}^{-2t}\}$.

(b) Hier handelt es sich um eine äußere Resonanz, dementsprechend ist der Ansatz für die partikuläre Lösung $y_p(t) = C\,t\,\mathrm{e}^{-2t}$. Zuerst berechnen wir die Ableitungen.

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= C\,\mathrm{e}^{-2t} - 2Ct\,\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}(C - 2Ct) \\ \ddot{y}_p(t) &= -2C\,\mathrm{e}^{-2t} - 2(C - 2Ct)\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}(-4C + 4Ct) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen in die Gleichung können wir C bestimmen.

$$(-4C + 4Ct)\mathrm{e}^{-2t} + (5C - 10Ct)\mathrm{e}^{-2t} + 6Ct\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}.$$

Damit ergibt sich $C = 1$ und die partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = t\mathrm{e}^{-2t}.$$

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi]$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi, \\ 2\pi - x & \pi < x \le 2\pi, \end{cases}$$

die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi]$.

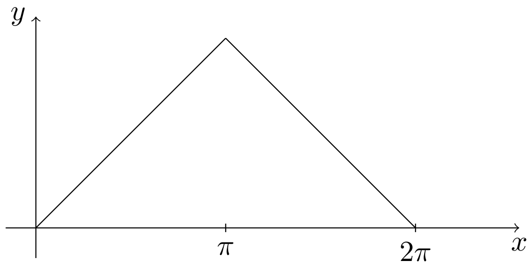
(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie (gerade/ungerade) für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Begründen Sie, welche der folgenden Berechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k für die gegebene Funktion f richtig sind:

- $a_0 = 0$
- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \left(\displaystyle\int_0^{\pi} x \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \, \mathrm{d}x \right)$
- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x) \, \mathrm{d}x + \dfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x) \, \mathrm{d}x$
- $a_k = \dfrac{1}{\pi} \left(\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos(kx) \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \right)$
- $a_k = 0$
- $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi} \left(\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(kx) \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right)$
- $b_k = 0$

Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Lösung.

(a) 

(b) Aus der Skizze sieht man, dass f eine gerade Funktion ist, damit ist die periodische Fortsetzung ebenfalls gerade.

(c) Die richtige Berechnungsformeln sind:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi x \,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\,\mathrm{d}x\right)$,
- $a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$,
- $b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)$,
- $b_k = 0$.