

1. Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld

$$\mathbf{f} = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 12x^3y^2 + 4x^3 \\ 6x^4y + 6y^2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. $\varphi(x, y) = 3x^4y^2 + x^4 + 2y^3 + c$

2. Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder

$$\mathbf{F}_1(x, y) = (2x - y, x^2)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$$

Gradientenfelder sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential.

Lösung. \mathbf{F}_1 ist kein Gradientenfeld, $\Phi_2(x, y, z) = xyz + c$.

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$ entlang der Kurve $C = \left\{ \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi] \right\}$.

Lösung. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

4. Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes \mathbf{F} entlang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)^T, (3, 4, 5)^T, (2, -2, -1)^T$, wobei die Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden.

Lösung. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

5. Gegeben ist ein Vektorfeld

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 6x^5z^5 + 7x^6y^2 + 6x^5 \\ 2x^7y + 3y^2z^2 + 2y \\ 5x^6z^4 + 2y^3z + 2z \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften muss das Vektorfeld \mathbf{f} haben, damit ein Potential φ mit Gradientenfeld \mathbf{f} existiert? Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld \mathbf{f} .

Lösung. Das Vektorfeld \mathbf{f} ist stetig, stetig differenzierbar und wirbelfrei.

$$\varphi(x, y, z) = x^6z^5 + x^7y^2 + x^6 + y^3z^2 + y^2 + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

6. Gegeben sei ein Parameterintegral

$$I(x) = \int_x^{2x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

Berechnen Sie die Ableitung des Parameterintegrals auf zwei Arten: zuerst Integrieren, dann Differenzieren und umgekehrt.

Lösung. $I(x) = -\cos(2) + \cos(1)$

7. Eine Lemniskate ist durch die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ definiert. Berechnen Sie den von ihr eingeschlossenen Flächeninhalt unter Verwendung der Polarkoordinaten.

Hinweis. Fertigen Sie zuerst eine Skizze an.

Lösung. $A = 2a^2$

8. Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks $R = [0, 3] \times [0, 7]$ und das Integral

$$\int_R 5x^2y^3 \mathrm{d}A.$$

Lösung. $A = 21$, $\int_R 5x^2y^3 \mathrm{d}A = \frac{108045}{4}$