

1. Ein Kreiszylinder ist gegeben mit $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Der Zylinder bohrt aus der Kugel $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2\}$ einen Körper $K = Z \cap B$ aus. Berechnen Sie das Volumen von K .

Lösung. $V_K = (16 - 3\sqrt{3}) \frac{\pi}{3} R^3$

2. Gegeben sei ein Bereich B , der von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$ begrenzt wird. Berechnen Sie

$$I = \int_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dV.$$

Lösung. $I = \frac{4\pi}{15}$

3. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_K e^{-z} \, dV,$$

mit $K = \{(x, y, z) : z \geq x^2 + y^2\}$.

Lösung. $I = \pi$

4. Ein homogener Körper¹ wird durch die Ungleichungen

$$0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq a^2(1 - z)^2$$

beschrieben. Bestimmen Sie seinen Schwerpunkt.

Lösung. $S = (0, 0, \frac{1}{4})$

5. Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_K (x + y + z) \, dV,$$

wobei K der durch die Ungleichungen $x, y, z \geq 0$ und $x + y + z \leq 1$ bestimmte Körper ist.

Lösung. $I = \frac{1}{8}$

6. Berechnen Sie das Volumen V des Körpers G von \mathbb{R}^3 , der entsteht, wenn man aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ den Zylinder $x^2 + y^2 \leq 1$ ausschneidet. Der Körper G ist also gegeben durch

$$G = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9, x^2 + y^2 > 1\}.$$

Lösung. $V = \frac{32\sqrt{8}}{3} \pi$

¹Ein homogener Körper ist einer mit über den Ort gleich bleibender Dichte.