Praktische Mathematik 1 für TPH **Übungsblatt 5** 16.11.2021

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 4x$ auf $[-\pi, \pi]$, die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird. Die Funktion lässt sich durch eine klassische Fourierreihe $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ darstellen.

   Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k, mit $k \in \mathbb{N}$.

   Lösung. $a_0 = 0,\ a_k = 0,\ b_k = -8\frac{(-1)^k}{k}$

2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = |\cos(x)|$, auf $[0, 2\pi]$, die außerhalb der Intervalls periodisch fortgesetzt wird. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k.

   Lösung. $a_0 = \frac{2}{\pi}, a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ -\frac{4}{\pi(k^2-1)}(-1)^{\frac{k}{2}} & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}, b_k = 0 \text{ für alle } k.$

3. Berechnen Sie mit Hilfe eines Ansatzes eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2y(t) = 5\mathrm{e}^t.$$

   Lösung. $C = \frac{5}{3},\ y_p(t) = \frac{5}{3}t\mathrm{e}^t$

4. Berechnen Sie die Lösung $u = u(t)$ des Anfangwertproblems

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = \cos t, \qquad u(0) = \dot{u}(0) = \tfrac{11}{10}.$$

   Untersuchen Sie das Verhalten der Lösung, d.h. skizzieren Sie die Lösung und bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

   Lösung. $u(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t.$

5. Lösen Sie das Randwertproblem

$$u'' - u = 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

   Lösung. $u(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2-x} - 1 - \mathrm{e}^2}{(1+\mathrm{e}^2)}$

6. Berechnen Sie die Lösung des Ranwertproblems

$$u'' + u = 0, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

   Untersuchen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

   Lösung. $u(x) = c\sin(t)$

7. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \mathrm{e}^t$$

   nach $y = y(t)$.

   Lösung. $y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t\mathrm{e}^t + \frac{t^2\mathrm{e}^t}{2}.$